

15 Übungen zur optimalen Regelung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 2. April 2015, 9:13



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Aufgabe 1: Reviewfragen

- (a) Was sind die Unterschiede zwischen dem zeitvarianten LQR-Verfahren und dem Reglerentwurf durch Polvorgabe?
- (b) Was wird jeweils mit den Matrizen P_{t_1} , Q und R gewichtet?
- (c) Welchen Wert hat P_{t_1} im zeitinvarianten Fall?
- (d) In welchem Fall führt die Wahl $Q = 0$ zu einem stabilen Regler?
- (e) Was bedeutet detektierbar?
- (f) Was bedeutet stabilisierbar?
- (g) Was muss gegeben sein, damit beim LQ-Regler Stabilität garantiert ist?
- (h) Wie ändert sich die Systemantwort, wenn Q vergrößert, bzw. R verkleinert wird?

Aufgabe 2: Wahl der Tuning-Matrizen

Gegeben sei das lineare, zeitinvariante System

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Lässt sich mit der folgenden Wahl von Q und R ein garantiert stabiler LQ-Regler entwerfen? Falls nein, warum nicht?

- (a) $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = 0$
- (b) $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = 1$

$$(c) \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 1$$

$$(d) \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1$$

$$(e) \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, R = -1$$

Aufgabe 3: Steuerbarkeit und Detektierbarkeit

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\ y &= \mathbf{H}\mathbf{x} \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Transformationsmatrix zur Transformation in die Modalform ist

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Ist das System für $u = 0$ stabil?
- (b) Lässt sich das System mit Hilfe eines Zustandsreglers $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ stabilisieren?
- (c) Zum Entwurf eines LQ-Reglers mit dem Kostenfunktional

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + u^2) dt$$

soll die Kovarianzmatrix $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^T \mathbf{H}$ gesetzt werden. Stabilisiert der resultierende Regler $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, der das Kostenfunktional minimiert, das System?

Aufgabe 4: Entwurf eines skalaren LQ-Reglers

Gegeben sei das System

$$\dot{x}(t) = 2x(t) + 4u(t)$$

und das Kostenfunktional

$$J = \int_0^{\infty} (10x^2(t) + 2u^2(t)) dt$$

- (a) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen zeitinvarianten Riccati-Gleichung.
- (b) Wie lautet der Regler $u = -Kx$, der das Kostenfunktional minimiert?
- (c) Begründen Sie, ob die Strecke und/oder der optimale Regler stabil sind.
- (d) Geben Sie den Zustand $x(t)$ des geschlossenen Kreises für $t > 0$ in Abhängigkeit t und $x(0) = x_0$ an

Aufgabe 5: Entwurf eines LQ-Reglers für ein System 2. Ordnung

Gegeben sei das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

und das Kostenfunktional

$$J = \int_0^{\infty} \left(\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u^2 \right) dt$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

lautet.

- (b) Bestimmen Sie den Regler $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, der das Kostenfunktional minimiert.
- (c) Geben Sie das charakteristische Polynom und die Pole des geschlossenen Regelkreises an.

Aufgabe 6: LQR-Design für ein stehendes Pendel [FPE10, Example 7.23]

Die linearisierte und normierte Bewegungsgleichung eines stehenden Pendels ist $\ddot{\varphi} = \varphi - u$.

- (a) Bestimmen Sie den Regler $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, der das Kostenfunktional

$$J = \int_0^{\infty} \left(\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u^2 \right) dt \quad \text{minimiert.}$$

- (b) Bestimmen Sie die Pole des geschlossenen Regelkreises.
- (c) Bestimmen Sie die Verstärkung \bar{N} des Reglers $u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \bar{N}r$, so dass im eingeschwungenen Zustand $y = \varphi = r$ gilt. Warum darf r nicht zu groß gewählt werden?

Aufgabe 7: LQR-Entwurf mit Matlab

Bestimmen Sie für das lineare System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

den Regler $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, der das Kostenfunktional

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u^2 dt$$

minimiert. Untersuchen Sie mit Hilfe von Matlab, ob die Bedingungen für einen LQR Reglerentwurf mit garantierter Stabilität erfüllt sind. Simulieren Sie das Einschwingverhalten des geschlossenen Regelkreises mit der Matlab-Funktion `lsim` für $0 \leq t \leq 6$ s.

Literatur

- [FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powell und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.