15 Optimale Regelung*

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 6. Februar 2015, 10:33

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

*[Lun13, Kapitel 7]

1 Einführung

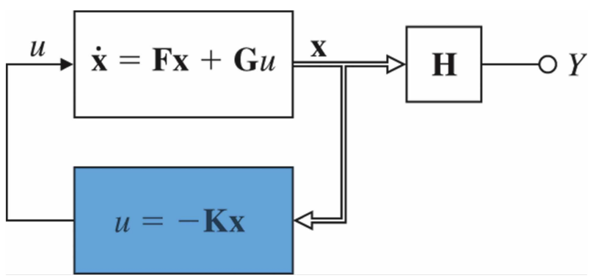
Wie soll sich ein geschlossener Regelkreis verhalten?

1

Wir suchen ein Verfahren, mit dem sich die Pole oder die Rückführmatrix K bestimmen lassen, so dass:

2

Wiederholung Zustandsregelung



3

Systemdynamik:

Für ein steuerbares System können wir die Pole des geschlossenen Regelkreises durch die lineare

Zustandsrückführung beliebig platzieren, so dass sich folgende Fragen stellen:

4

2 Berechnung des LQ-Regulators

2.1 Bewertung der Reglergüte

Als Maß für die Güte eines Regler lässt sich eine *quadratische Kostenfunktion* J verwenden:

5

6

2.2 Anforderungen an die Tuningmatrizen

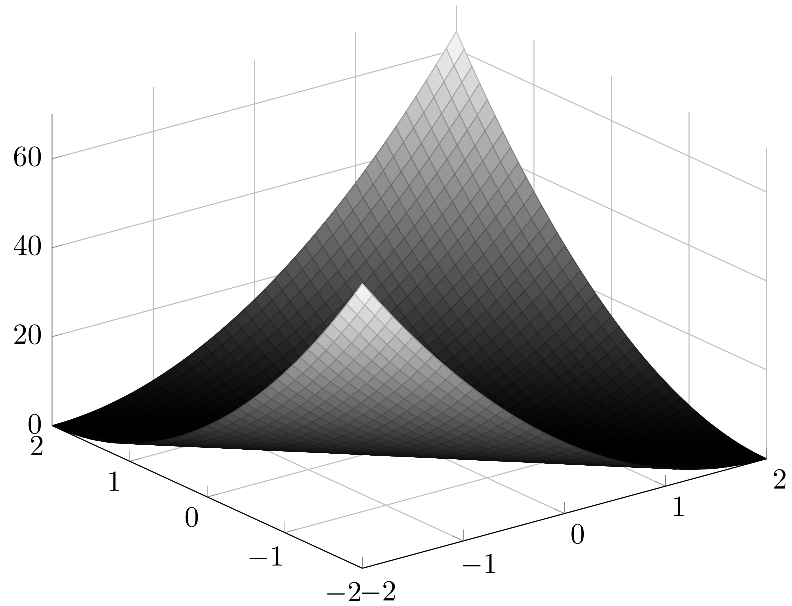
Damit $J \geq 0 \; \forall u, x$ und das Minimierungsproblem effizient lösbar ist, müssen die Matrizen P_{t_1}, $Q(t)$ und $R(t)$ bestimmte Anforderungen erfüllen:

7

2.3 Beispiel zu semi-definite Matrizen

Quadratische Funktion mit positiv semi-definiter Matrix $Q = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$:

8



2.4 Auswahl eines guten Regeleingangs u

Die Funktion J spiegelt die „Kosten“ für einen bestimmten Regler wider. Das Ziel ist nun, $u(t)$ so zu wählen, dass die Kostenfunktion J für gegebene Matrizen P_{t_1}, $Q(t)$ und $R(t)$ minimal wird. Formal:

9

Es lässt sich zeigen, dass die Lösung die folgende lineare Zustandsrückführung ist:

10

wobei $P(t)$ die Lösung der Matrix-Riccati-Differentialgleichung ist:

11

2.5 Eigenschaften der Matrix $\boldsymbol{P}(t)$

1. $\boldsymbol{P}(t)$ ist die Lösung der Matrix-Riccati-Differentialgleichung in Lücke 11.

   12

2. Symmetrie: 13

3. 14

4. 15

5. Wenn $\boldsymbol{P}_{t_1} = 0$ ist und die Matrizen $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{Q}$ und $\boldsymbol{R}$ konstant sind, dann „wächst $\boldsymbol{P}(t)$ monoton" mit *abnehmender* Zeit. Formal:

   16

3 Der zeitinvariante LQ-Regulator

3.1 Herleitung

Die Abbildung 1 zeigt den typischen Verlauf einer eindimensionalen Matrix-Riccati-Differentialgleichung mit unterschiedlichen Endzeiten t_1, für $F = G = R = Q = 1$ und $P(t_1) = 0$. Es wurde also folgende Gleichung *vorwärts* integriert

17

und dann rückwärts gegen die Zeit, also

18

aufgetragen.

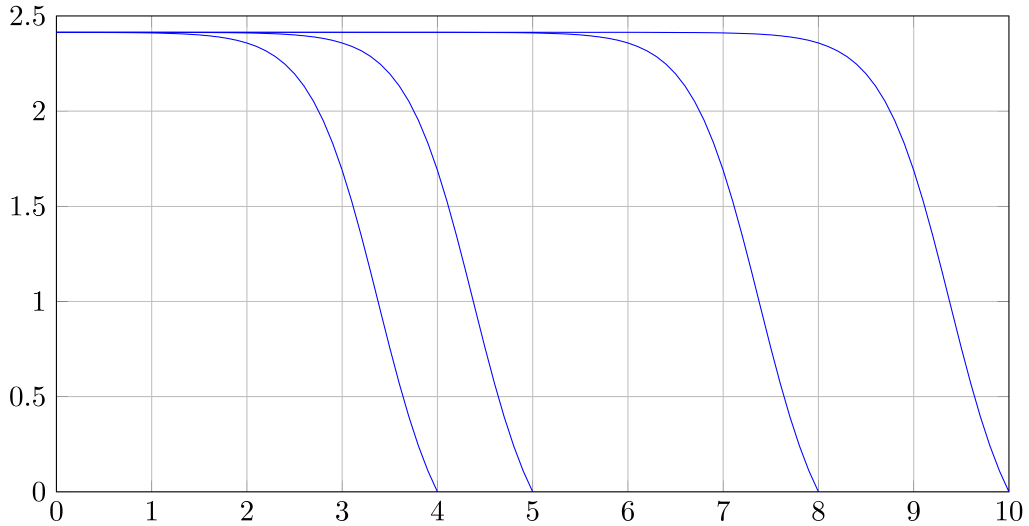


Abbildung 1: Lösung einer eindimensionalen Matrix-Riccati-Gleichung.

⇒ Abbildung 1 zeigt, dass die Lösung lange 19 ______ bleibt und schließlich gegen 20 ______ geht, wenn 21 ______ erreicht wird. Mit $\boldsymbol{Q}$ und $\boldsymbol{R}$ konstant und $t_1 \to \infty$ folgt also

22 ______

Aus der Riccati-Matrix-Differentialgleichung wird dann die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung (ARE):

23 ______

Der optimale Regeleingang ist also

24 ______

und damit eine lineare Zustandsrückführung mit konstanter Rückführmatrix $\boldsymbol{K}$.

3.2 Zusammenfassung

25

Optimaler Regeleingang: 26

$\boldsymbol{P}$ erfüllt die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung (ARE):

27

Das Optimierungsproblem erlaubt eine vernünftige, das heißt endliche, Lösung, wenn das System

28

stabilisierbar ist. Stabilisierbar bedeutet:

29

3.3 Nicht stabilisierendes Beispiel

Obige Bedingungen garantieren *nicht*, dass der resultierende Regler das System stabilisiert. Beispiel:

30

Offensichtlich minimiert $u(t) = 0$ die Kostenfunktion, aber das System ist mit dieser Lösung *instabil.*

- $\Rightarrow$ Instabile Moden müssen durch die Kostenfunktion erfasst werden.
- $\Rightarrow$ Stabilität ist garantiert, wenn das System

  31

detektierbar ist. Detektierbar bedeutet:

32

Typisch ist 33 , wenn 34 detektierbar ist.

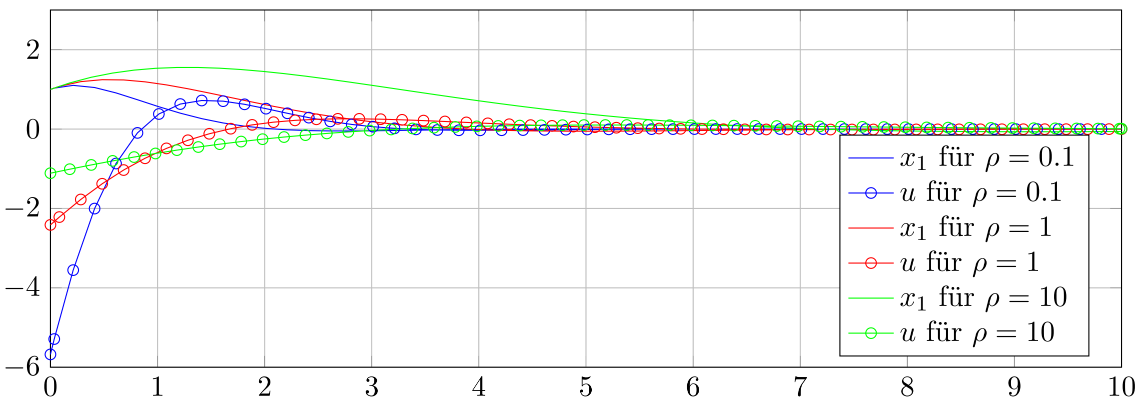
4 Simulationsbeispiel

4.1 Einfluss der Tuningparameter

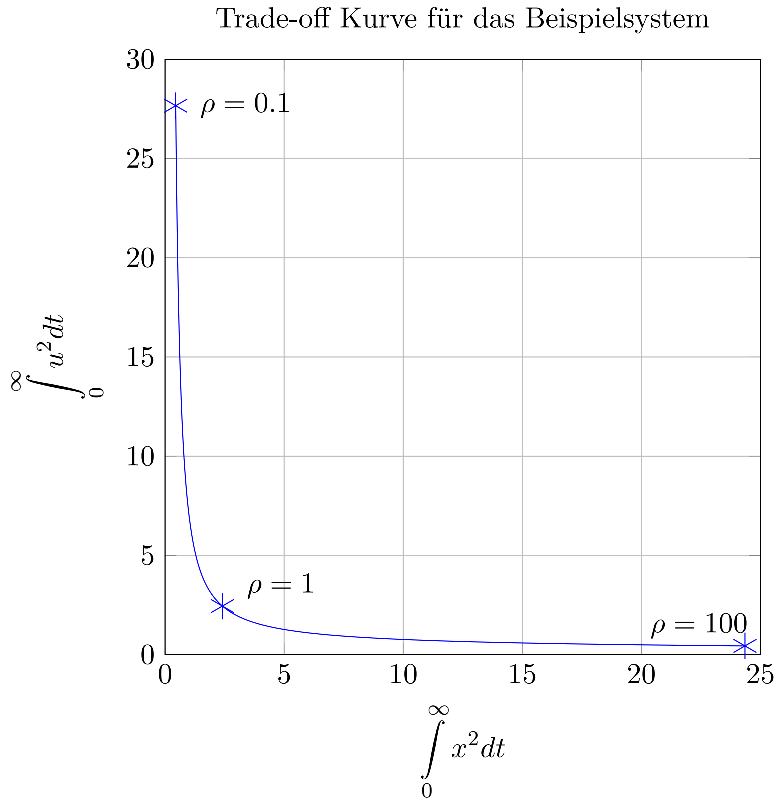
$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}, \quad R = \rho, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Anfangswertantwort



4.2 Pareto-Optimum



5 Numerische Berechnung des LQR

Matlab stellt alle Werkzeuge zur Lösung der Matrixgleichungen zur Verfügung:

- Zeitinvarianter Fall ($t_1 \to \infty$):
  - Die Matlabfuntion `lqr` liefert die Rückführmatrix $\boldsymbol{K}$, die Lösung der ARE $\boldsymbol{P}$ und die Pole des geschlossenen Regelkreises.
  - Soll nur die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung gelöst werden, kann die Funktion `care` verwendet werden.
- Zeitvarianter Fall ($t_1 < \infty$):
  - Die Matrix-Riccati-Differentialgleichung kann durch Matrixfaktorisierung gelöst werden, siehe zum Beispiel [Bie77]. Alternativ lässt sich ein numerischer ODE-Löser wie `ode45` verwenden.
  - Das zeitvariante Stellsignal lässt sich mit der Lösung der Matrix-Riccati-DGL implementieren.

Literatur

[Bie77] J. Gerald Bierman. *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation.* Englisch. Academic Press, 1977.

[Lun13] Jan Lunze. *Regelungstechnik 2.* 7. überarbeitete Auflage. Springer Vieweg, 2013.