14 Übungen zu Regelung im Zustandsraum Teil 2

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 19. März 2015, 11:32

Aufgabe 1: Integralregelung [FPE10, Aufgabe 7.56]

Das linearisierte Modell eines Luftlagers ist $\ddot{x} - x = u + w$, wobei w eine systematische Abweichung (Bias) ist.

(a) Entwerfen Sie eine Integralregelung mit $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix}$, so dass die Pole des geschlossenen Regelkreises bei -1 und $-1 \pm i$ liegen und die bleibende Regelabweichung durch w bei einer Sprungantwort Null ist. Der Ausgang sei $y = x$ und der Referenzeingang $r = y_{\text{ref}}$ sei eine Konstante.

(b) Zusatzaufgaben: Verfizieren Sie Ihr Ergebnis mit dem Matlab-Befehl `place`. Plotten Sie mit dem Matlab-Befehl `lsim` die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises und nach $t = 8s$ die Antwort auf einen Sprung im Bias-Eingang w.

Aufgabe 2: Beobachterentwurf

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -10x_1 - 2x_2 + 10u \\ y &= 4x_1 \end{aligned}$$

Es kann nur der Zustand x_1 gemessen werden, daher soll ein Beobachter mit der Beobachterverstärkungsmatrix

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}$$

entworfen werden. Bestimmen Sie die Verstärkungen ℓ_1 und ℓ_2, so dass die Pole des Beobachters bei -8 liegen.

Aufgabe 3: Regelung im Zustandsraum

Aufgabe 3.1: Zustandsregler

Gegeben sei ein System mit den Zustandsraummatrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

mit $c_1, c_2 > 0$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von c_1 und c_2 eine Zustandsrückführung

$$u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

so dass die Pole des geschlossenen Regelkreises bei -2 und -4 liegen.

Aufgabe 3.2: Referenzsystem

Gegeben sei das System (1) mit $c_1 = 2$ und $c_2 = 0$ und die Reglerverstärkung $K = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}$. Wir betrachten den Regler

$$u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + Nr$$

Bestimmen Sie N, so dass der Ausgang

$$y_r = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

dem Referenzwert r folgt.

Aufgabe 3.3: Beobachter

Der Zustand des Systems (1) mit $c_1 = 2$ und $c_2 = 0$ soll auf Basis des gemessenen Ausgangs

$$y_\mathrm{m} = \boldsymbol{C}_\mathrm{m}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

geschätzt werden. Bestimmen Sie die Beobachtungsmatrix L, so dass die Pole des Beobachters bei -10 und -5 liegen.

Aufgabe 4: Kombination aus Zustandsregler und -beobachter

Aufgabe 4.1: [FPE15, Aufgabe 7.48]

Ein bestimmter Prozess habe die Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{4}{s^2 - 4}$.

(a) Bestimmen Sie $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ für dieses System in Beobachtungsnormalform.

(b) Wenn $u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$, bestimmen Sie $\boldsymbol{K}$, so dass die Pole des geschlossenen Regelkreises bei $s = -2 \pm 2i$ liegen.

(c) Bestimmen Sie $\boldsymbol{L}$, so dass die Pole des Beobachters bei $s = -10 \pm 10i$ liegen.

(d) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion D_c des resultierenden Reglers.

Aufgabe 4.2: [FPE15, Aufgabe 7.50]

Nehmen Sie an, ein Gleichstrommotor mit dem Motorstrom u ist mit den Rädern eines Wagens verbunden, um die Bewegung eines umgedrehten Pendels auf dem Wagen zu regeln. Die linearisierten und normalisierten Bewegungsgleichungen für dieses System lassen sich in der Form

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \theta + v + u\\ \dot{v} &= \theta - v - u\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\theta &= \text{Winkel des Pendels}\\ v &= \text{Geschwindigkeit des Wagens}\end{aligned}$$

beschreiben.

(a) Der Winkel θ soll durch eine Rückführung der Form

$$u = -K_1\theta - K_2\dot{\theta} - K_3 v$$

geregelt werden. Bestimmen Sie die Rückführ-Verstärkungen, so dass die resultierenden closed-loop-Pole bei -1 und $-1 \pm i\sqrt{3}$ liegen.

(b) Nehmen Sie an, dass θ und v gemessen werden. Konstruieren Sie einen Beobachter für θ und $\dot{\theta}$ in der Form

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{L}(y - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}})$$

mit $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}\theta & \dot{\theta}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ und $y = \theta$. Betrachten Sie v und u als bekannt. Bestimmen Sie $\boldsymbol{L}$, so dass beide Beobachterpole bei -2 liegen.

(c) Geben Sie die Übertragungsfunktion D_{c} des Reglers an (Hinweis: $v = 0$ setzen).

(d) Zusatzaufgaben:

(i) Plotten Sie mit Matlab die Bodediagramme für den Regler D_{c} und den aufgeschnittenen Regelkreis. Bestimmen Sie für den aufgeschnittenen Regelkreis die Betrags- und die Amplitudenreserve.

(ii) Plotten Sie mit dem Matlab-Befehl `lsim` die Systemantwort auf eine Anfangsbedingung $\theta = 0.1$.

Aufgabe 4.3: Kombinierte Aufgabe RT1 und RT2 [FPE10, Aufgabe 7.51]

Instabile Bewegungsgleichungen der Form

$$\ddot{x} = x + u$$

erscheinen in Situationen, in denen die Bewegung eines stehenden Pendels (zum Beispiel eine Rakete) geregelt werden muss.

(a) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve für $u = -Kx$ in Abhängigkeit von der skalaren Vertärkung K.

(b) Betrachten Sie einen Regler der Form

$$U(s) = K\frac{s+a}{s+10}X(s)$$

Bestimmen Sie a und K so ,dass das System ein Steigzeit von $t_\mathrm{r} = 2\,\mathrm{s}$ und nicht mehr als eine Überschwingweite von $M_\mathrm{p} = 25\,\%$ zeigt. Skizzieren Sie die Wurzelortskurve in Abhängigkeit von K.

(c) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm für die Strecke ohne Regler.

(d) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm für den aufgeschnittenen Regelkreis. Entwerfen Sie einen Zustandsregler, so dass die Pole des geschlossenen Regelkreises am gleichen Ort in Aufgabenteil (b) sind.

(e) Entwerfen Sie einen Beobachter für x und $\dot{x}$ mit $y = x$ als Messgröße. Bestimmen Sie die Beobachter-Verstärkung $\boldsymbol{L}$ so, dass die Gleichung für $\hat{\boldsymbol{x}}$ charakteristische Pole mit einer Dämpfungskonstante $\zeta = 0.5$ und einer ungedämpften Eigenfrequenz $\omega_\mathrm{n} = 8$ hat.

Literatur

[FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powel und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.

[FPE15] Gene F. Franklin, J. David Powel und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 7th global edition. Pearson Prentice Hall, 2015.

Lösung 1:

Die naheliegende Zustandsraumdarstellung des Systems ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}w$$
$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\end{bmatrix}$$

Wir erweitern den Zustandsvektor um den integralen Zustand x_I mit

$$\dot{x}_\mathrm{I} = y - r$$

Mit dem erweiterten Zustandsvektor $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix}x_\mathrm{I} & x & \dot{x}\end{bmatrix}^\mathrm{T}$ ergibt sich für die erweiterten Matrizen der Zustandsraumdarstellung

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{a} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_\mathrm{a} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_\mathrm{a} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Der Rückführvektor $\boldsymbol{K}$ lässt sich nun mit Hilfe der erweiterten Matrizen bestimmen:

$$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}_\mathrm{a} + \boldsymbol{G}_\mathrm{a}\boldsymbol{K}) \overset{!}{=} s^3 + 3s^2 + 4s + 2$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix}2 & 5 & 3\end{bmatrix}$$

Lösung 2:

Die Pole des Beobachters sind die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{F} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{H}$:

$$\begin{aligned}\det\Big(s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{H})\Big) &= \det\left(\begin{bmatrix}s & -1\\ 10 & s+2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\ell_1\\ \ell_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\end{bmatrix}\right)\\ &= \begin{vmatrix}s+4\ell_1 & -1\\ 10+4\ell_2 & s+2\end{vmatrix} = s^2 + (4\ell_1+2)s + (4\ell_2 + 10 + 8\ell_1)\end{aligned}$$

Damit die beiden Pole des Beobachters bei -8 liegen, muss das charakteristische Polyom das folgende Polynom sein:

$$(s+8)^2 = s^2 + 16s + 64$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$\ell_1 = 3.5, \quad \ell_2 = 6.5$$

Lösung 3:

Lösung 3.1:

- Das charakteristische Soll-Polynom ist $(s+2)(s+4) = s^2 + 6s + 8$
- Das charakteristische Polynom ergibt sich als $|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}| = s^2 + (c_2 + k_2)s + c_1 + k_1$
- Koeffizientenvergleich ergibt: $k_1 = 8 - c_1$, $k_2 = 6 - c_2$

Lösung 3.2:

- Wir bestimmen die Verstärkungen $\boldsymbol{N}_x$, N_u gemäß Skript 13, Lücke 33, als

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{x1} \\ N_{x2} \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Ausmultiplizieren und Auflösen ergibt $\boldsymbol{N}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $N_u = 2$
- Skript 13, Lücke 31: $N = N_u + \boldsymbol{KN}_x = 2 + \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 5$

Lösung 3.3:

- Das charakteristische Soll-Polynom ist $(s+5)(s+10) = s^2 + 15s + 50$
- Das charakteristische Polynom ergibt sich als $|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{LC}_\mathrm{m}| = s^2 + \ell_1 s + 2 + \ell_2$
- Koeffizientenvergleich ergibt: $\ell_1 = 15$, $\ell_2 = 48$

Lösung 4:

Lösung 4.1:

Lösung 4.2:

Lösung 4.3: