13 Übungen zu Regelung im Zustandsraum Teil 1

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 12. März 2015, 11:38

Aufgabe 1: Reviewfragen

(1) Was sind die Regelziele der Zustandsregler $u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$ und $u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \bar{N}r$?

(2) Was ist der Vorteil des Reglerenwurfs für Systeme in Regelungsnormalform?

(3) Was ist der Einfluss von Nullstellen des aufgeschnittenen Regelkreises auf den Regler?

Aufgabe 2: Entwurf einer Zustandsrückführung

(1) [FPE10, Aufgabe 7.20] Betrachten Sie folgendes System:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

(a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems.

(b) Bestimmen Sie die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises für:

(i) $u = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

(ii) $u = -Ky$

(2) Für das System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

soll eine Zustandsrückführung entworfen werden, die folgender Spezifikation genügt:

- Die Pole des geschlossenen Regelkreises sollen einen Dämpfungskoeffizienten von $\zeta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ haben.
- Die Anstiegszeit t_p der Sprungantwort soll $t_\mathrm{p} = \pi\,\mathrm{sec}$ sein.

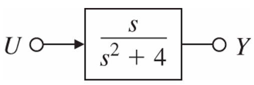
(3) [FPE10, Aufgabe 7.22]

(a) Für das folgende System soll ein Regler mit Zustandsrückführung entworfen werden, wobei die Überschwingweite $M_\mathrm{p} \leq 25\,\%$ und die $1\,\%$-Einschwingzeit $t_\mathrm{s} \leq 0.115\,\mathrm{s}$ sein soll.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

(b) Zusatzaufgabe: Nutzen Sie das `step` Kommando in MATLAB®, um Ihren Entwurf zu verifizieren.

(4) [FPE10, Aufgabe 7.24] Betrachten Sie folgendes System:



(a) Bestimmen Sie für dieses System die Zustandsdarstellung in Regelungsnormalform.

(b) Entwerfen Sie eine Zustandsrückführung, so dass die Pole des geschlossenen Regelkreises bei $s = -6 \pm 6\,\mathrm{i}$ liegen.

Aufgabe 3: Entwurf einer Folgeregelung

Bestimmen Sie die Zustandsrückführung für das System

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & \boldsymbol{G} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{H} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, & J &= 0, \end{aligned}$$

so dass es einem Sprung auf den Referenzwert r ohne bleibende Regelabweichung folgt. Gegeben sei die Zustandsrückführung $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$.

Literatur

[FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powel und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.

Lösung 1:

(1) Zustand auf $\boldsymbol{x} = 0$ und damit den Ausgang $y = \boldsymbol{Cx} = 0$ regeln.

(2) Einfache Bestimmung der Rückführmatrix $\boldsymbol{K}$ durch Koeffizientenvergleich.

(3) Je näher Nullstellen und Pole beieinander liegen, desto weniger steuerbar wird das System, die Determinante der Steuerbarkeitsmatrix geht gegen Null und die notwendige Verstärkung gegen unendlich. Wenn eine Nullstelle und ein Pol sich auslöschen, ist das System nicht mehr steuerbar oder beobachtbar. das

Lösung 2:

(1) (a) $G(s) = \dfrac{7s + 27}{s^{2+4s-7}}$

(b) (i) $s^2 + s(s + 2K_2 + K_1) + (6K_1 + 7K_2 - 7) = 0$

(ii) $s^2 + s(7K + 4) + (27K - 7)$

(2)

$$t_\mathrm{p} = \pi = \frac{\pi}{\omega_\mathrm{d}} \Rightarrow \omega_\mathrm{d} = 1$$
$$\omega_\mathrm{d} = \omega_\mathrm{n}\sqrt{1 - \zeta^2} \Rightarrow \omega_\mathrm{n} = \sqrt{2}$$

Das Sollverhalten führt somit auf folgende charakteristische Gleichung:

$$s^2 + 2\zeta\omega_\mathrm{n}s + \omega_\mathrm{n}^2 = s^2 + 2s + 2$$

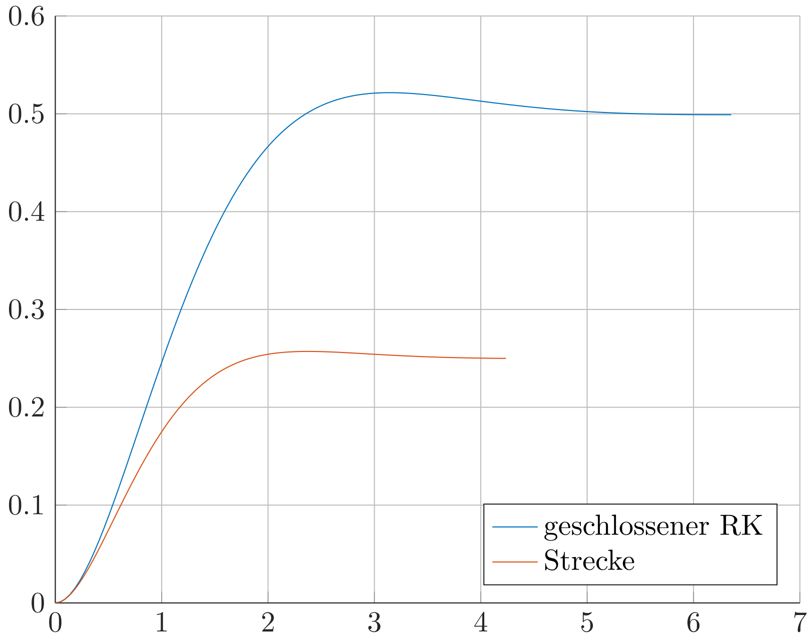
Mit der Zustandsrückführung $u = \boldsymbol{Kx}$ folgt dann

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 - k_1 & -3 - k_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$
$$\det(s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})) = s^2 + (3 + k_2)s + (4 + k_1)$$

Koeffizientenvergleich der Soll- und Ist- charakteristischen Gleichung ergibt

$$k_1 = -2, k_2 = -1$$

Sprungantwort der Strecke und des geschlossenen Regelkreises, erzeugt mit dem MATLAB®-Befehl `step`:



(3) (a)

$$M_\mathrm{p} = \mathrm{e}^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.25$$

$$\Rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{\ln^2 M_\mathrm{p}}{\pi^2 + \ln^2 M_\mathrm{p}}} = \sqrt{\frac{\ln^2 0.25}{\pi^2 - \ln^2 0.25}} \approx 0.4$$

$$t_\mathrm{s} = \frac{-\ln 0.01}{\zeta\omega_\mathrm{n}} = 0.115$$

$$\Rightarrow \omega_\mathrm{n} \approx \frac{4.6}{0.115 \cdot 0.4} = 99.1917$$

Sollverhalten:

$$s^2 + 2\zeta\omega_\mathrm{n} s + \omega_\mathrm{n}^2 = s^2 + 80s + 9839$$

Mit $u = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$ folgt

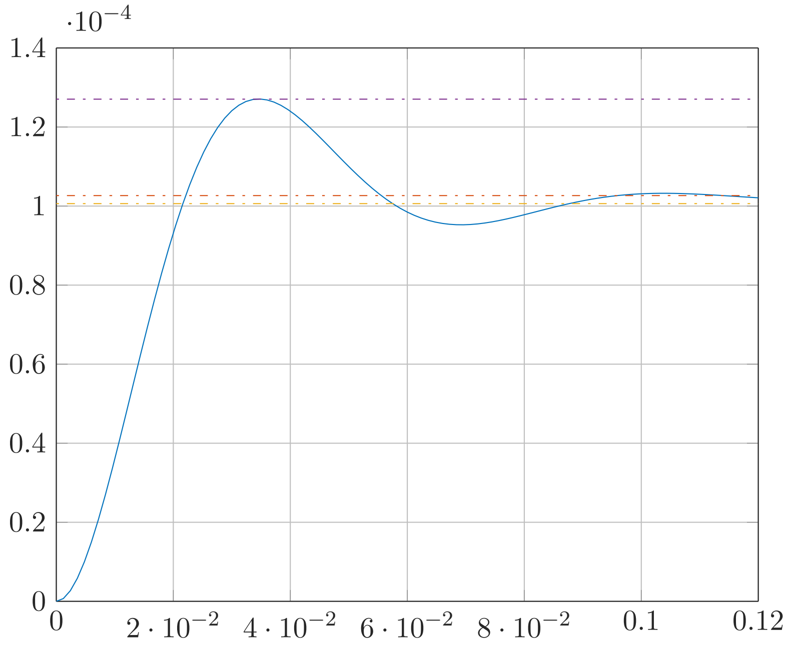
$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -9-k_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

$$\det(s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})) = s^2 + (9 + k_2)s + k_1$$

Koeffizientenvergleich:

$$k_1 = 9839, k_2 = 71$$

(b)



(4) (a)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0$$

(b) Charakteristische Gleichung Soll=Ist:

$$s^2 + 12s + 72 = s^2 + k_2 s + 4 + k_1$$
$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} 68 & 12 \end{bmatrix}$$

Lösung 3:

$$\boldsymbol{N}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad N_u = 0$$
$$\Rightarrow \bar{N} = K_1$$
$$u = -K_1(x_1 - r) - K_2 x_2 = -K_1 x_1 - K_2 x_2 + K_1 r$$