11 Kanonische Formen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 6. Februar 2015, 11:20

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung[1]

Es existieren *unendlich viele Realisierungen* zu einer Übertragungsfunktion, von denen die drei kanonischen Formen für uns interessant sind:

1. Regelungsnormalform für den Reglerentwurf
2. Beobachtungsnormalform für den Beobachterentwurf

[1]siehe auch [FPE10, Kapitel 7.4.1]

3. Modal- oder Jordanform zur Systemanalyse

Hinweis: In [FPE10] werden, wie im angelsächsischen Raum und damit auch in MATLAB® üblich, die Zustände der Regelungs- sowie der Beobachtungsnormalform im Vergleich zu hier in *umgekehrter* Reihenfolge nummeriert!

2 Regelungsnormalform

Für eine Übertragungsfunktion $Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)}U(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}U(s)$ lässt sich die Regelungsnormalform bestimmen, indem wir die Zustandsvariablen x_i folgendermaßen (und damit auch die Systemgleichung) definieren:

1 ______

Somit gilt für die Zustandsvariablen im Bildbereich:

$$\mathcal{L}\{x_i\} = \quad \text{2 \_\_\_\_\_\_} \tag{1}$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}_i\} = \quad \text{3 \_\_\_\_\_\_} \tag{2}$$

Dies in die letzte Zeile in Lücke 1 eingesetzt und nach 4 ______ aufgelöst ergibt zunächst

5 ______

Gleichung (1) und Lücke 5 in die entsprechend umgeformte Übertragungsfunktion

6 ______

einsetzen ergibt im Bildbereich

7 ______

und schließlich zurück transformiert in den Zeitbereich ergibt sich für die Messgleichung

8

Die Regelungsnormalform der oben gegebenen Übertragungsfunktion ist somit

9

Beispiel: Bestimme die Regelungsnormalform der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10s^2 + 4s + 7}{s^3 + 3s^2 + 5s + 6}$$

sowie die entsprechende Blockdiagrammstruktur.
Regelungsnormalform:

10

Blockdiagrammstruktur der Regelungsnormalform:

11

Die Blockdiagrammstruktur der Regelungsnormalform zeigt, dass jeder 12

auf den 13 zurückgeführt wird.

3 Beobachtungsnormalform

Die Beobachtungsnormalform lässt sich ähnlich wie die Regelungsnormalform herleiten, worauf wir aber hier verzichten werden.

14

Die Beobachtungsnormalform ist somit die 15 der Regelungsnormalform und vice versa.[2] Die eine lässt sich durch die andere demnach folgendermaßen bestimmen:

16

Beispiel: Bestimme die Beobachtungsnormalform der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{5s^2 + 3s + 1}{s^3 + 2s^2 + 5s + 6}$$

sowie die entsprechende Blockdiagrammstruktur.
Beobachtungsnormalform:

17

[2] Für steuer- und beobachtare Systeme.

Blockdiagrammstruktur der Beobachtungsnormalform:

18

Die Blockdiagrammstruktur der Beobachtungsnormalform zeigt, dass der 19 zu allen 20 zurückgeführt wird.

4 Modal- oder Jordanform

Bei einfachen oder konjugiert komplexen Polen zerlegen wir die Übertragungsfunktion in Ihre Partialbrüche. Jeder Partialbruch entspricht dann einem Modus. Komplexe Polpare werden zu einem quadratischen Partialbruch zusammengefasst, der Modus ist dann in der 2×2-Regelungsnormalform. Ein mehrfacher Pol $\frac{b}{(s-p)^m}$ führt ohne weitere Zerlegung zur $m \times m$-Jordanform. Die Systemmatrix hat dann eine Blockdiagonalstruktur.

1. Alle Pole p_i sind reell und einfach, die Übertragungsfunktion in Partialbruch-Darstellung ist dann 21

   Einem Partialbruch 22 ordnen wir die Zustandsgleichung im Bildbereich 23 und damit im Zeitbereich 24 zu.

   Die Messgleichung ist dann die Summe 25

Die Modalform für einfache reelle Pole hat somit folgende Form:

26

Beispiel: Bestimme die Modalform der Übertragungsfunktion

27

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+7s+12} =$$

sowie die entsprechende Blockdiagrammstruktur.

28

Blockdiagrammstruktur der Modalform (siehe auch [FPE10, Abb. 7.8, Seite 445]):

29

2. Ein komplexes Polpaar führt zu einem Partialbruch der Form

30

Dieser wird in Regelungsnormalform

31

an entsprechender Stelle in das System eingefügt. Ein komplexes Polpaar p_i und $\widetilde{p}_i$ führt bei ansonsten einfachen und reellen Polen dann zu folgender Darstellung:

32

3. Die Jordanform des m-fachen Pols $\frac{b}{(s-p)^m}$ ist

33

Dies lässt sich leicht zeigen, indem man im Bildbereich sukzessive die i-te Zeile nach X_i auflöst und in der $i+1$-ten Zeile für X_{i+1} einsetzt, beginnend bei $i = 1$. Die m-te Zeile ergibt dann $X_1 = \frac{1}{(s-p)^m}U$. Dies in die Messgleichung im Bildbereich eingesetzt ergibt dann die gegeben Übertragungsfunktion.

Aufgabe: Stellen Sie folgende Übertragungsfunktion in Jordannormalform dar[3]:

34

$$G(s) = \frac{2s+4}{s^2(s^2+2s+4)} =$$

35

Blockdiagrammstruktur der Jordannormalform (siehe auch [FPE10, Abb. 7.9, Seite 446, wobei die Reihenfolge der Zustände blockweise umgekehrt ist])

36

[3] Die Modalform ist ein Spezialfall (alle Pole sind einfach und reell) der Jordanform, so dass im allgemeinen Fall der Begriff *Jordanform* genutzt wird.

Literatur

[FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powel und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.