

10 Übungen Zustandsraumdarstellung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 11. Februar 2015, 16:32



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Aufgabe 1: Review-Fragen

Gegeben sei für die folgenden Fragen ein System in Zustandsraumdarstellung mit den Matrizen A, B, C, D , Eingang u , Ausgang y und dem Zustandsvektor x .

- (1) Wie lassen sich die Pole der Übertragungsfunktion des Systems bestimmen?
- (2) Wie lassen sich die Nullstellen der Übertragungsfunktion des Systems bestimmen?
- (3) Lassen sich aus der Zustandsraumdarstellung verschiedene Übertragungsfunktionen ableiten?

Aufgabe 2: Übertragungsfunktion / DGL $\Rightarrow$ Zustandsraumdarstellung

Bestimmen Sie die Matrizen A, B, C und D der Zustandsraumdarstellung folgender Systeme

(1) $\ddot{y} + y = u$

(2) $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 4}$

(3) $G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3}$

(4) $\ddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3y = u$

(5) $\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3y + a_4y = u$

Aufgabe 3: Zustandsraumdarstellung $\Rightarrow$ Übertragungsfunktion

- (1) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ folgender Systeme mit Hilfe der Matrixinversion.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, $D = 1$

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $D = 0$

- (2) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion folgender Systeme mit Hilfe der Rosenbrockmatrix.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = 0$

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D = 1$

- (3) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion folgender Systeme mit Hilfe der Ergebnisse von Aufgabe 2.

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D = 0$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D = 0$

Lösung 1:

$$(1) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0, \text{ Pole} = \text{Eigenwerte der Systemmatrix } \mathbf{A}$$

$$(2) \det(P(s)) = \det \left(\begin{array}{c|c} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline -\mathbf{C} & D \end{array} \right)$$

(3) Nein. Die Abbildung Zustandsraumdarstellung $\rightarrow$ Übertragungsfunktion ist eindeutig.

Lösung 2:

$$(1) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

$$(3) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

$$(4) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

$$(5) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

Lösung 3:

$$(1) \text{ (a) } G(s) = \frac{s^2 + 5s - 4}{s^2 + s - 2}$$

$$\text{ (b) } G(s) = \frac{6s^2 + 6s - 6}{s^3 + 2s^2 - s - 2}$$

$$(2) \text{ (a) } P = \left[\begin{array}{cc|c} s-1 & 1 & 1 \\ 1 & s+1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right], G(s) = \frac{s}{s^2 - 2}$$

$$\text{ (b) } P = \left[\begin{array}{ccc|c} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 2 & 1 & s & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], G(s) = \frac{s^3 + s + 8}{s^3 + s + 2}$$

$$(3) \text{ (a) } G(s) = \frac{1}{s^3 - 3s^2 + 2s - 1}$$

$$\text{ (b) } G(s) = \frac{1}{s^4 + 3s^3 + s^2 - s + 2}$$