Regelungstechnik 2

Klausur vom 28.04.2014

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 23. Juni 2014, 9:10

Name	Vorname

Drei Punkte pro Aufgabe. Mindestpunktzahl zum Bestehen: 10 Punkte. Hilfsmittel: maximal zehn einseitig oder fünf beidseitig beschriftete DIN-A4-Spickzettel beliebigen Inhalts, möglichst selbst verfasst oder zusammengestellt; nicht programmierbarer Taschenrechner; kein Skript, keine andere Formelsammlung, kein Computer, kein Mobiltelefon.

Aufgabe 1: Transformationsmatrix bestimmen

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ mit $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$ für das System

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}\end{aligned}$$

zur Transformation in die Beobachtungsnormalform.

Aufgabe 2: Übertragungsfunktion aus Zustandsdarstellung

Bestimmen Sie Übertragungsfunktion in der Form $G(s) = \dfrac{b_0 + b_1 s + \ldots}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots}$ für folgendes System:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + u\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Reglerentwurf mit Polvorgabe

Entwerfen Sie einen Regler für das System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

mit der Rückführmatrix $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ und $u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$, so dass die Pole des geschlossenen Regelkreises bei $s_{1,2} = -1 \pm i$ liegen.

Aufgabe 4: Differenzengleichung eines Abtastsystems bestimmen

Gegeben sei die Übertragungsfunktion zur Lageregelung eines Satelliten

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1000s^2}$$

Bestimmen Sie dafür die Differenzengleichung des Abtastsystems (Halteglied 0-ter Ordnung am Eingang, ideale Abtastung zu den Zeitpunkten $t = kT$) mit der Abtastzeitschrittweite $T = 0.1$ in der Form

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \ldots + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \ldots$$

Hinweise:

- *Bestimmen Sie im ersten Schritt die entsprechende z-Übertragungsfunktion*
- *Auf Seite 4 finden Sie die Tabelle der Laplace- und z-Transformationen*

Aufgabe 5: Kalman-Filter entwerfen

Gegeben sei der stochastisch gestörte Oszillator

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{w}(t) \qquad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(t) + v(t) \qquad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

wobei nur die Winkelgeschwindigkeit x_1 gemessen wird. Bestimmen Sie zur Beobachtung der Winkelbeschleunigung x_2 die konstante Kalman-Verstärkung $\boldsymbol{L}$ des zeitinvarianten Kalman-Filters

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{L}(y(t) - \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}})$$

Die Kovarianz-Matrizen des Prozess- und des Messrauschens seien $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ und $R = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 6: Zustandstransformation

Transformieren Sie das System

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix}-4 & 3\\ -6 & 5\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}0.5\\ 1\end{bmatrix}u\\ y &= \begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

zu einem neuen Zustand $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{z}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}u\\ y &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}\end{aligned}$$

mit der Transformationsmatrix $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix}1 & 0.5\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$.
Geben Sie die Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ an. Welche spezielle Form der Zustandsbeschreibung liegt hier vor? Geben Sie ohne weitere Berechnung jeweils mit kurzer Begründung an, ob das System stabil, stabilisierbar, beobachtbar und detektierbar ist.

Aufgabe 7: Zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung bestimmen

Bestimmen Sie die zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung des ungedämpften Oszillators

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

mit der Abtastzeitschrittweite T.
Hinweise:

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}\right\} = 1 - \cos\omega t$
- *Auf Seite 4 finden Sie die Tabelle der Laplace- und z-Transformationen*

Aufgabe 8: Beobachterentwurf mit Polvorgabe

Gegeben ist das ungeregelte System

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}\\ y &= \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\end{aligned} \qquad \text{mit} \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -c_1\\ 1 & 0 & -c_2\\ 0 & 1 & -c_3\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

wobei $c_1, c_2, c_3 > 0$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von c_1, c_2, c_3 die Beobachterverstärkung $\boldsymbol{L}$ des Beobachters

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{L}(y - \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}) \qquad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix}l_1\\ l_2\\ l_3\end{bmatrix},$$

dessen Pole bei $s_{1,2} = -10 \pm i, s_3 = -10$ liegen.

Laplace Transforms and z-Transforms of Simple Discrete-Time Functions

No.	$F(s)$	$f(kT)$	$F(z)$
1		$1, k=0; 0, k \neq 0$	1
2		$1, k=k_o; 0, k \neq k_o$	z^{-k_o}
3	$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}(kT)^2$	$\frac{T^2}{2}\left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right]$
6	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{3!}(kT)^3$	$\frac{T^3}{6}\left[\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}\right]$
7	$\frac{1}{s^m}$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}e^{-akT}\right)$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$
8	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2}{2}e^{-aT}z\frac{(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
11	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}e^{-akT}\right)$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$
12	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
13	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(akT-1+e^{-akT})$	$\frac{z[(aT-1+e^{-aT})z+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})]}{a(z-1)^2(z-e^{-aT})}$
14	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
15	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{z[z-e^{-aT}(1+aT)]}{(z-e^{-aT})^2}$
16	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-e^{-akT}(1+akT)$	$\frac{z[z(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})+e^{-2aT}-e^{-aT}+aTe^{-aT}]}{(z-1)(z-e^{-aT})^2}$
17	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bkT}-ae^{-akT}$	$\frac{z[z(b-a)-(be^{-aT}-ae^{-bT})]}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
18	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin akT$	$\frac{z\sin aT}{z^2-(2\cos aT)z+1}$
19	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos akT$	$\frac{z(z-\cos aT)}{z^2-(2\cos aT)z+1}$
20	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akT}\cos bkT$	$\frac{z(z-e^{-aT}\cos bT)}{z^2-2e^{-aT}(\cos bT)z+e^{-2aT}}$
21	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akT}\sin bkT$	$\frac{ze^{-aT}\sin bT}{z^2-2e^{-aT}(\cos bT)z+e^{-2aT}}$
22	$\frac{a^2+b^2}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$1-e^{-akT}(\cos bkT+\frac{a}{b}\sin bkT)$	$\frac{z(Az+B)}{(z-1)[z^2-2e^{-aT}(\cos bT)z+e^{-2aT}]}$
			$A=1-e^{-aT}\cos bT-\frac{a}{b}e^{-aT}\sin bT$
			$B=e^{-2aT}+\frac{a}{b}e^{-aT}\sin bT-e^{-aT}\cos bT$

$F(s)$ is the Laplace transform of $f(t)$, and $F(z)$ is the z-transform of $f(kT)$.
Note: $f(t)=0$ for $t=0$.

Name:

Aufgabe 1:

Name:

Aufgabe 2:

Name:

Aufgabe 3:

Name:

Aufgabe 4:

Name:

Aufgabe 5:

Name:

Aufgabe 6:

Name:

Aufgabe 7:

Name:

Aufgabe 8: