

17 Übungen Diskrete Systeme

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 21. April 2015, 14:54



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Aufgabe 1: Reviewfragen

- Wie hängen z - und s -Ebene zusammen?
- Wie wird die linke s -Halbebene in die z -Ebene abgebildet?
- Unter welcher Voraussetzung gilt der Endwertsatz für diskrete Systeme?
- Beschreiben sie den Reglerentwurf durch diskrete Äquivalente.

Aufgabe 2:

Die z -Transformierte eines zeitdiskreten Filters $h(k)$ bei einer Abtastrate von 1 Hz ist

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

- Diskreter Ein- und Ausgang dieses Filters seien $u(k)$ und $y(k)$. Bestimmen Sie die Differenzengleichung, die den Zusammenhang zwischen $u(k)$ und $y(k)$ beschreibt.
- Bestimmen Sie jeweils die Eigenfrequenz ω_n und das Dämpfungsmaß ζ der Pole von $H(z)$.
Hinweis: Nutzen Sie den Zusammenhang zwischen z und s .
- Begründen Sie, warum das Filter stabil ist.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie mit Hilfe der z -Transformation die Lösung der Differenzengleichung

$$y(k) - 3y(k-1) + 2y(k-2) = 2u(k-1) - 2u(k-2)$$

für

$$(a) u(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (b) u(k) = \begin{cases} k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

jeweils mit $y(k) = 0, k < 0$.

Hinweis: Die notwendige Partialbruchzerlegung ist auf zwei Arten möglich: Entweder Zerlegung der Lösung

- $Y(z^{-1})$, anschließend die Partialbrüche umformen in Zähler-/Nennerpolynom in z , oder
- Zerlegung in Partialbrüche der Form $\frac{z}{(z - z_l)^m}$, das heißt Partialbruchzerlegung von $Y^*(z)$ mit $Y(z) = z \cdot Y^*(z)$.

Aufgabe 4:

Die Fibonacci-Zahlen werden durch die Differenzengleichung

$$u(k+2) = u(k+1) + u(k) \text{ mit } u(0) = u(1) = 1$$

generiert.

- (a) Bestimmen Sie die z -Transformierte $U(z)$.

Hinweis: Nutzen Sie den Linksverschiebungssatz

$$f(k+n) \circ \bullet z^n F(z) - z^n \sum_{\ell=0}^{n-1} z^{-\ell} f(\ell)$$

- (b) Bestimmen Sie die Pole von $U(z)$.
- (c) Bestimmen Sie die geschlossene Form der Fibonacci-Reihe $u(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{U(z)\}$.
Zusatzaufgabe: Bestimmen Sie $u(42)$.
- (d) Bestimmen Sie die Fibonacci-Zahlen bis $u(4)$ durch Polynomdivision von $U(z)$.
- (e) Zusatzaufgabe: Was ist das Verhältnis $u(k+1)/u(k)$ zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen für $k \rightarrow \infty$?

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie zu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s+2}$$

die Differenzengleichung bei Approximation mit einem Halteglied 0-ter Ordnung und einer Abtastzeit von $T = 0.05$ s.

Aufgabe 6:

Diskretisieren Sie den Regler

$$D_c(s) = \frac{\frac{4}{5}s + 1}{50s + 1}$$

durch Approximation mit der Trapezregel (*Tustin's Method*). Setzen Sie die Abtastzeit auf $T = 0.1$ s und geben Sie $D_c(z)$ als gebrochenrationale Funktion in z^{-1} an.