

15 Optimale Regelung*

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 26. März 2015, 9:18

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: <http://www.z5z6.de>



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Berechnung des <i>Linear-Quadratic-Regulators</i>	3
2.1	Bewertung der Reglergüte	3
2.2	Anforderungen an die Tuningmatrizen	3
2.3	Beispiel zu semi-definite Matrizen	4
2.4	Auswahl eines guten Regeleingangs u	4
2.5	Eigenschaften der Matrix $\mathbf{P}(t)$	5
3	Der zeitinvariante LQ-Regulator	5
3.1	Herleitung	5
3.2	Zusammenfassung	7
3.3	Nicht stabilisierendes Beispiel	7

*[Lun13, Kapitel 7]

4 Simulationsbeispiel	8
4.1 Einfluss der Tuningparameter	8
4.2 Pareto-Optimum	9
5 Numerische Berechnung des LQR	10

1 Einführung

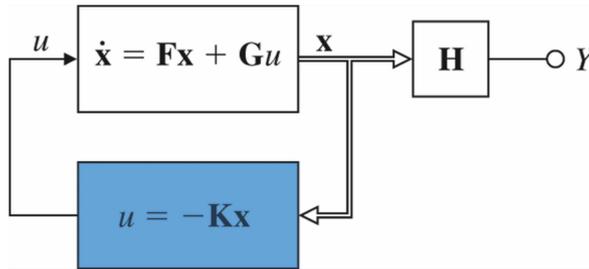
Wie soll sich ein geschlossener Regelkreis verhalten?

1 _____

Wir suchen ein Verfahren, mit dem sich die Pole oder die Rückführmatrix K bestimmen lassen, so dass:

2 _____

Wiederholung Zustandsregelung



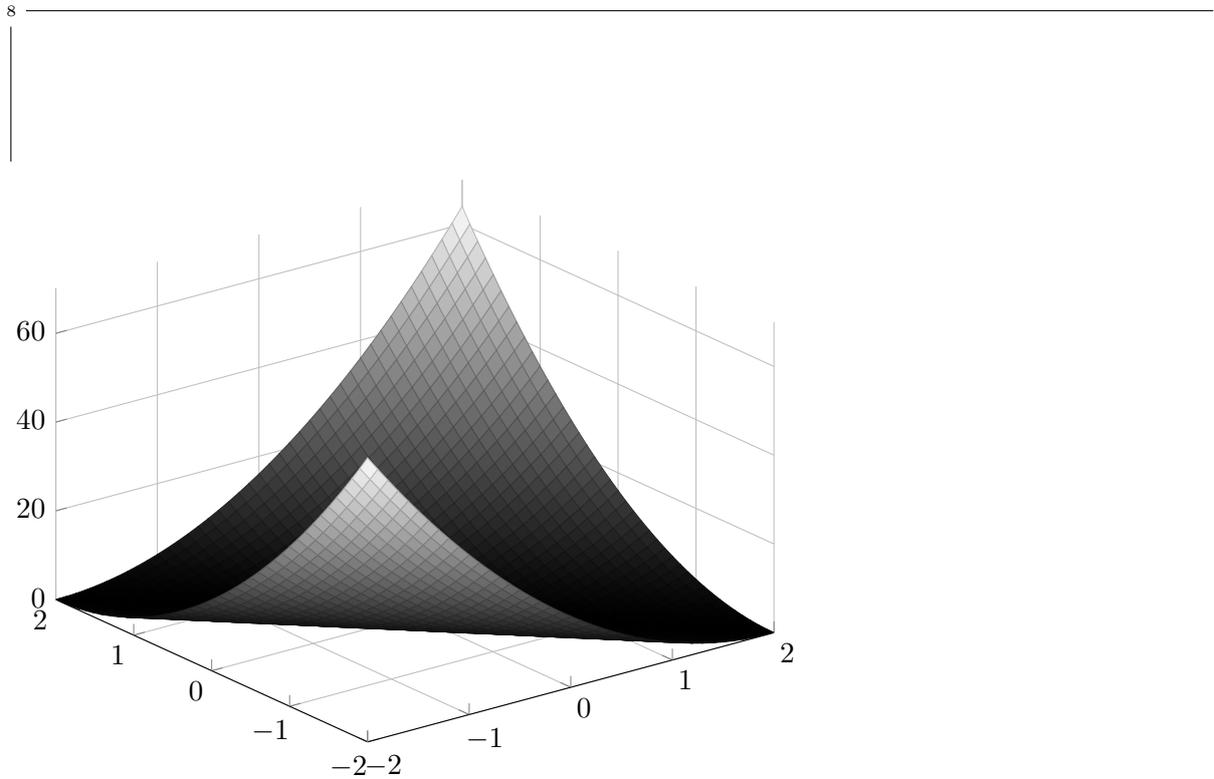
3 _____

Systemdynamik:

Für ein steuerbares System können wir die Pole des geschlossenen Regelkreises durch die lineare

2.3 Beispiel zu semi-definite Matrizen

Quadratische Funktion mit positiv semi-definiter Matrix $Q = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$:



2.4 Auswahl eines guten Regeleingangs u

Die Funktion J spiegelt die „Kosten“ für einen bestimmten Regler wider. Das Ziel ist nun, $u(t)$ so zu wählen, dass die Kostenfunktion J für gegebene Matrizen P_{t_1} , $Q(t)$ und $R(t)$ minimal wird. Formal:

9

Es lässt sich zeigen, dass die Lösung die folgende lineare Zustandsrückführung ist:

10

wobei $P(t)$ die Lösung der Matrix-Riccati-Differentialgleichung ist:

11 _____
 |

2.5 Eigenschaften der Matrix $P(t)$

1. $P(t)$ ist die Lösung der Matrix-Riccati-Differentialgleichung in Lücke 11.

12 _____
 |

2. Symmetrie: _____
 13 |

3. _____
 14 |

4. _____
 15 |

5. Wenn $P_{t_1} = 0$ ist und die Matrizen F , G , Q und R konstant sind, dann „wächst $P(t)$ monoton“ mit *abnehmender* Zeit. Formal:

16 _____
 |

3 Der zeitinvariante LQ-Regulator

3.1 Herleitung

Die Abbildung 1 zeigt den typischen Verlauf einer eindimensionalen Matrix-Riccati-Differentialgleichung mit unterschiedlichen Endzeiten t_1 , für $F = G = R = Q = 1$ und $P(t_1) = 0$. Es wurde also folgende Gleichung *vorwärts* integriert

17 _____
 |

und dann rückwärts gegen die Zeit, also

18 _____
 |

aufgetragen.

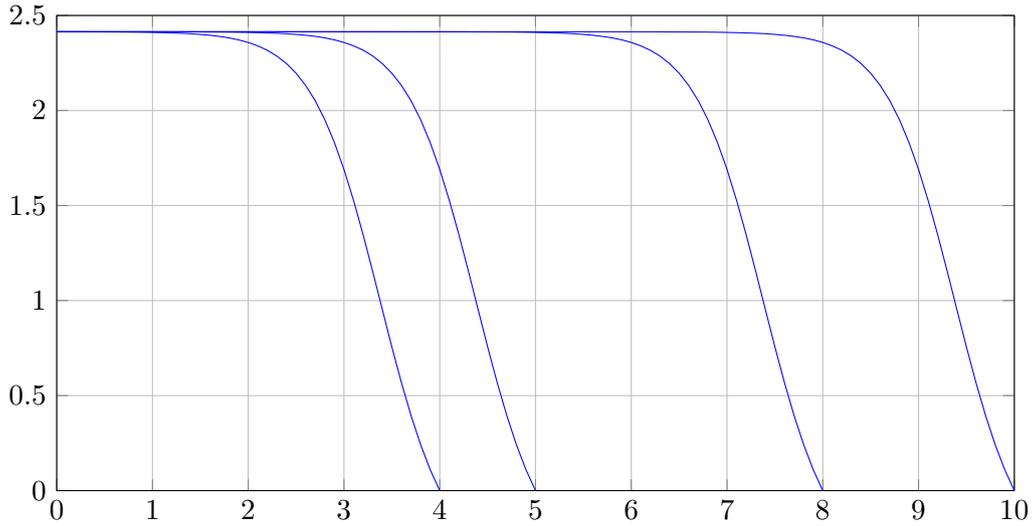


Abbildung 1: Lösung einer eindimensionalen Matrix-Riccati-Gleichung.

¹⁹ _____
 ⇒ Abbildung 1 zeigt, dass die Lösung lange _____ bleibt und schließlich gegen
²⁰ _____
 _____ geht, wenn ²¹ _____
 _____ erreicht wird. Mit \mathbf{Q} und \mathbf{R} konstant und $t_1 \rightarrow \infty$ folgt also

²² _____

Aus der Riccati-Matrix-Differentialgleichung wird dann die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung (ARE):

²³ _____

Der optimale Regeleingang ist also

²⁴ _____

und damit eine lineare Zustandsrückführung mit konstanter Rückführmatrix \mathbf{K} .

3.2 Zusammenfassung

25

Optimaler Regeleingang: ²⁶

\mathbf{P} erfüllt die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung (ARE):

27

Das Optimierungsproblem erlaubt eine vernünftige, das heißt endliche, Lösung, wenn das System

28

stabilisierbar ist. Stabilisierbar bedeutet:

29

3.3 Nicht stabilisierendes Beispiel

Obige Bedingungen garantieren *nicht*, dass der resultierende Regler das System stabilisiert.
Beispiel:

30

Offensichtlich minimiert $u(t) = 0$ die Kostenfunktion, aber das System ist mit dieser Lösung *instabil*.

⇒ Instabile Moden müssen durch die Kostenfunktion erfasst werden.

⇒ Stabilität ist garantiert, wenn das System

31

detektierbar ist. Detektierbar bedeutet:

³² |
 Typisch ist ³³ | , wenn ³⁴ | detektierbar ist.

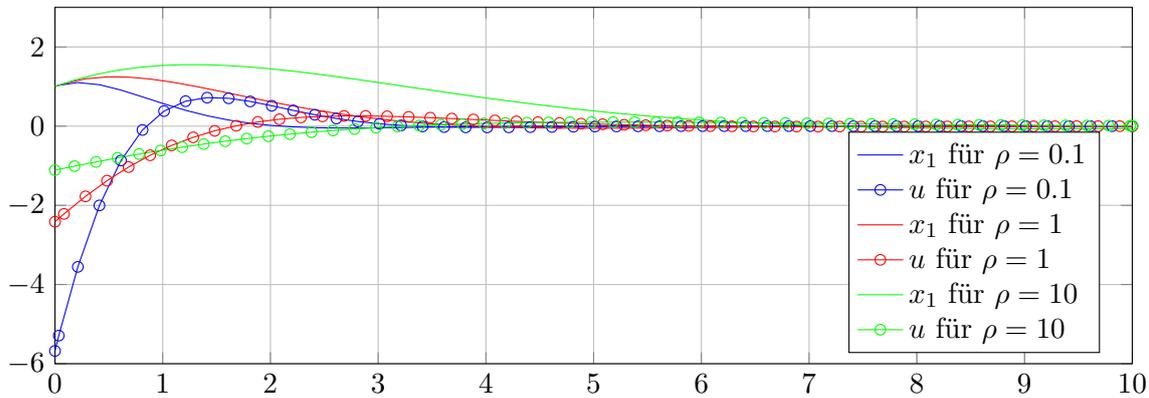
4 Simulationsbeispiel

4.1 Einfluss der Tuningparameter

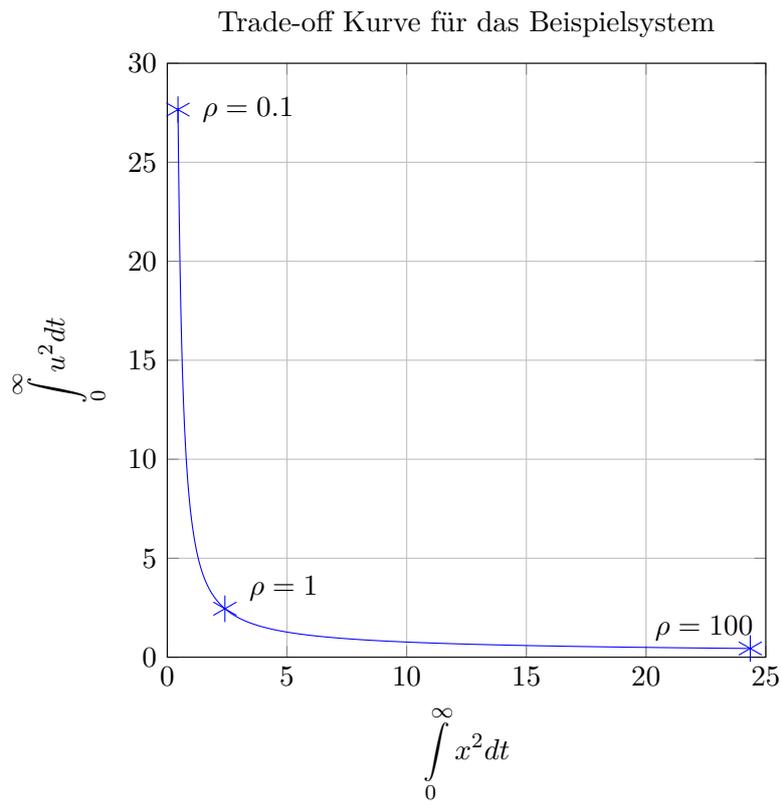
$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = H^T H, \quad R = \rho, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Anfangswertantwort



4.2 Pareto-Optimum



35

5 Numerische Berechnung des LQR

Matlab stellt alle Werkzeuge zur Lösung der Matrixgleichungen zur Verfügung:

- Zeitinvarianter Fall ($t_1 \rightarrow \infty$):
 - Die Matlabfunktion `lqr` liefert die Rückführmatrix \mathbf{K} , die Lösung der ARE \mathbf{P} und die Pole des geschlossenen Regelkreises.
 - Soll nur die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung gelöst werden, kann die Funktion `care` verwendet werden.
- Zeitvarianter Fall ($t_1 < \infty$):
 - Die Matrix-Riccati-Differentialgleichung kann durch Matrixfaktorisierung gelöst werden, siehe zum Beispiel [Bie77]. Alternativ lässt sich ein numerischer ODE-Löser wie `ode45` verwenden.
 - Das zeitvariante Stellsignal lässt sich mit der Lösung der Matrix-Riccati-DGL implementieren.

Literatur

- [Bie77] J. Gerald Bierman. *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation*. Englisch. Academic Press, 1977.
- [Lun13] Jan Lunze. *Regelungstechnik 2*. 7. überarbeitete Auflage. Springer Vieweg, 2013.