

# 14 Regelung im Zustandsraum Teil 2

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 4. Februar 2015, 11:03

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: <http://www.z5z6.de>



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Integralregelung</b>	<b>2</b>
1.1	Beispiel: Integralregelung einer Motordrehzahl . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Zustandsschätzung</b>	<b>4</b>
2.1	Beispiel: Ungedämpfter Oszillator . . . . .	5
2.2	Beobachter für Systeme in Beobachtungsnormalform . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Dualität</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Zustandsrückführung mit Beobachter</b>	<b>7</b>
4.1	Dynamischer Kompensator . . . . .	7
4.2	Beispiel: Kompensatorentwurf für die Lageregelung eines Satelliten . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Beobachter und Referenzsystem</b>	<b>12</b>

## 1 Integralregelung ([FPE10, Kapitel 7.10.1])

Die letztes Mal besprochene Referenzsystem-Methode hat zwar keine bleibende Regelabweichung, allerdings führt jede Änderung der Streckenparameter (zum Beispiel durch Temperatureinfluss, Alterung, etc.) dazu, dass der Fehler ungleich Null wird. Die Lösung hierfür ist die *Integralregelung*. Für das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\ y &= \mathbf{H}\mathbf{x}\end{aligned}$$

können wir das Integral des Fehlers<sup>1</sup>  $e = y - r$  sowie den Zustand  $\mathbf{x}$  zurückführen, indem wir die Strecke um den zusätzlichen integralen Zustand  $x_I$  erweitern, für den folgendes gilt:

---

1

Die erweiterten Zustandsgleichungen sind dann

---

2

Der Regler ist dann

---

3

Mit dieser überarbeiteten Systemdefinition können wir die bisher kennengelernten Reglerentwurfstechniken anwenden; sie führen auf die Reglerstruktur in Abbildung 1.

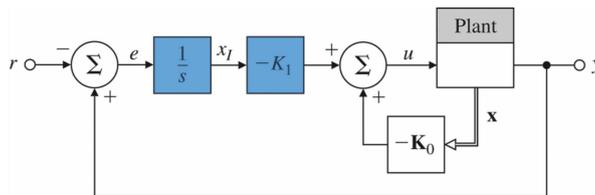


Abbildung 1: Struktur für Integralregelung ([FPE10, Abbildung 7.56])

<sup>1</sup>Achtung Vorzeichen: wir nutzen hier das Negative der üblichen Konvention.

**1.1 Beispiel: Integralregelung einer Motordrehzahl ([FPE10, Example 7.35])**

Die Motordrehzahl hat die Übertragungsfunktion

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s + 3} \Rightarrow$$

Der geschlossene Regelkreis soll einen Integralanteil sowie zwei Pole bei  $s = -5$  haben, das charakteristische Polynom ist also

5 \_\_\_\_\_  
|

Die erweiterte Systembeschreibung ist

6 \_\_\_\_\_  
|

Die Rückführmatrix  $K$  berechnen wir dann folgendermaßen:

7 \_\_\_\_\_  
|

Abbildung 2 zeigt den geschlossenen Regelkreis mit Beobachter, den wir im Folgenden behandeln werden.

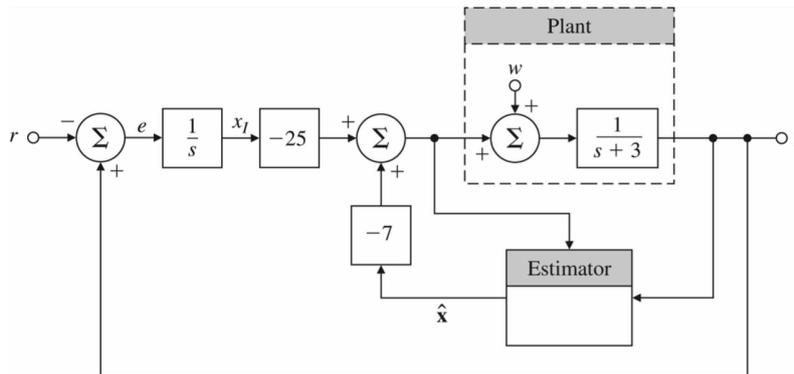


Abbildung 2: Beispiel Integralregelung ([FPE10, Abbildung 7.57])

**2 Zustandsschätzung ([FPE10, Kapitel 7.7])**

In den meisten Fällen werden nicht alle Zustandsgrößen gemessen, weil die benötigten Sensoren zu teuer sind, zum Beispiel für die Messung des Schwimmwinkels, oder weil es physikalisch nicht möglich ist, zum Beispiel in einem Kernkraftwerk. Die Idee ist daher, einen Schätzwert  $\hat{x}$  zu nutzen. Der Regler wäre dann

---

8

Eine einfache Methode der Schätzung ist die Simulation des Systems mit den gleichen Eingängen, wie in Abbildung 3 gezeigt. Wie die Steuerung hat dieser Open-Loop-Beobachter das

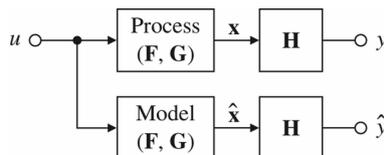


Abbildung 3: Open-Loop Beobachter

Problem, dass Störungen oder Parameterfehler nicht korrigiert werden und der Schätzfehler  $x - \hat{x}$  je nach Umständen groß werden kann. Die Lösung ist, die Differenz zwischen gemessenem

und geschätzten Ausgang zurückzuführen und dadurch den Schätzfehler kontinuierlich mit diesem Signal zu korrigieren, wie Abbildung 4 zeigt. Die Gleichung für den

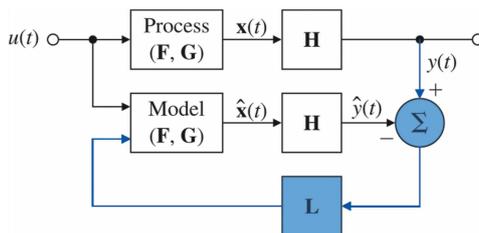


Abbildung 4: Closed-Loop Beobachter ([FPE10, Abbildung 7.28])

Beobachter von  $x$  in Abbildung 4 ist

---

10

Die Fehlerdynamik lässt sich ermitteln, indem der Schätzwert vom Zustand abgezogen wird:

---

11

Die charakteristische Gleichung des Fehlers ist damit gegeben durch

---

12

Jetzt müssen wir nur noch  $\mathbf{L}$  so wählen, dass <sup>13</sup>  $\left| \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right|$  stabile und angemessen schnelle Eigenwerte hat. Dann wird der Fehler  $\mathbf{e}$  auf Null abklingen und dort bleiben, unabhängig von der bekannten Zwangsfunktion  $u(t)$  und ihren Einfluss auf den Zustand  $\mathbf{x}(t)$ , sowie unabhängig von der Anfangsbedingung  $\mathbf{e}(0)$ .

### 2.1 Beispiel: Ungedämpfter Oszillator[FPE10, Example 7.25]

Wir entwerfen einen Beobachter für das einfache Pendel und legen die Pole der der Schätzfehlerdynamik auf  $-10\omega_0$ , fünf mal schneller als die Pole des Reglers, den wir zuletzt entwarfen. Die Bewegungsgleichungen sind

<sup>14</sup> 

---

Die charakteristische Gleichung  $a_e$  für die Pole des Schätzfehlers  $e$  ist

<sup>15</sup> 

---

Aus Lücke 12 folgt

<sup>16</sup> 

---

Aus dem Koeffizientenvergleich zwischen Lücke 15 und 16 folgt schließlich:

<sup>17</sup> 

---

## 2.2 Beobachter für Systeme in Beobachtungsnormalform

Die Wahl von  $L$  ist besonders einfach, wenn das System in Beobachtungsnormalform vorliegt:

18

Wie wir schon wissen ist die charakteristische Gleichung hier

19

Die Fehlerdynamik des Beobachter ist bestimmt durch

20

Die charakteristische Gleichung des Schätzfehlers ist somit

21

Wir schließen daraus:

Für ein beobachtbares System lassen sich die Pole durch die Wahl von  $L$  beliebig platzieren.

### 3 Dualität

Der Entwurf einer Zustandsregelung und der Beobachterentwurf sind mathematisch äquivalent oder *dual*:

22

### 4 Zustandsrückführung mit Beobachter ([FPE10, Kapitel 7.8])

Im Folgenden untersuchen wir die Auswirkungen, wenn wir anstatt des tatsächlichen den geschätzten Zustand in der Zustandsregelung nutzen. Wir setzen zunächst den Referenzeingang  $r = 0$ , somit gilt

23

Die charakteristische Gleichung dieses geschlossenen Regelkreises ist

24

Weil diese Matrix blockweise dreieckig ist, folgt

25

Daraus folgt das *Separationsprinzip*:

Pole des Gesamtsystems = Pole des Zustandsreglers + Pole des Beobachters.  
Die Entwürfe lassen sich somit einfach kombinieren.

#### 4.1 Dynamischer Kompensator

Als dynamischen Kompensator bezeichnet man die Kombination aus Zustandsregler und Beobachter. Der blau hinterlegte Bereich in Abbildung 5 entspricht einem klassischen Regler,

zum Beispiel einem PID-Regler. Wir bestimmen nun die Übertragungsfunktion  $D_c(s)$  dieses

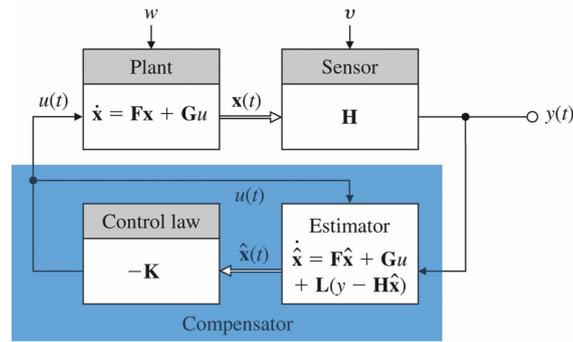


Abbildung 5: Beobachter und Regler kombiniert ([FPE10, Abbildung 7.35])

Kompensators. Dessen Zustandsgleichungen ergeben mit  $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$  in die Gleichung in Lücke 10 eingesetzt zu:

26 \_\_\_\_\_

Somit ist die Übertragungsfunktion des Reglers

27 \_\_\_\_\_

$$D_c(s) = \left| \right.$$

Weniger Rechenaufwand hat man, wenn man den Zähler als Determinante der Rosenbrock-Matrix und den Nenner als charakteristische Gleichung des Systems berechnet:

28 \_\_\_\_\_

**4.2 Beispiel: Kompensatorentwurf für die Lageregelung eines Satelliten ([FPE10, Example 7.28])**

Wir entwerfen einen Kompensator für die Satelliten-Strecke  $1/s^2$ . Die Pole des Reglers legen wir auf  $s = \sqrt{2}/2(-1 \pm i)$  ( $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ ,  $\zeta = \sqrt{2}/2$ ). Der Beobachter soll fünf mal „schneller“ sein, wir legen seine Pole daher so, dass  $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$  und  $\zeta = 0.5$  ist.

Zustanddarstellung der Strecke:

29

---

Charakteristische Soll-Gleichung des Reglers (Tipp: Satz von Viëta anwenden):

30

---

Charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises:

31

---

Aus dem Koeffizientenvergleich folgt die Rückföhrmatrix

32

---

Charakteristische Soll-Gleichung des Beobachters:

33

---

Charakteristische Gleichung des Schätzfehlers:

34

---

Aus dem Koeffizientenvergleich folgt die Beobachtermatrix:

35

Wir berechnen die Kompensator-Übertragungsfunktion nach Lücke 28. Zuerst den Nenner  $Y(s)$ :

36

Für den Zähler  $U(s)$  berechnen wir die Determinante der Rosenbrockmatrix  $P(s)$ :

37

Die Übertragungsfunktion des Kompensators ist somit<sup>2</sup>

38

Den Effekt der Kompensation auf die Pole des geschlossenen Regelkreises können wir nun mit den bekannten Methoden im Bildbereich wie der Wurzelortskurve untersuchen. Wir ersetzen dazu den speziellen Wert der Kompensator-Verstärkung mit der variablen Verstärkung  $K$  (Achtung: das ist *nicht* die Rückführmatrix!). Das negative Vorzeichen in  $D_c(s)$  ziehen wir an den Summationspunkt, so dass der entsprechende offene Regelkreis die Übertragungsfunktion

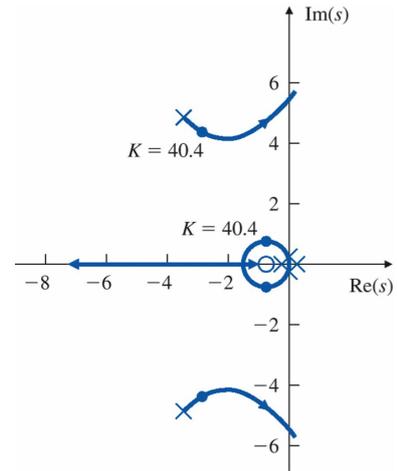
39

hat.

---

<sup>2</sup>Entspricht [FPE10, Gleichung 7.184]

Hierfür lässt sich die Wurzelortskurve bestimmen (siehe nebenstehende Abbildung), wobei die WOK durch die oben spezifizierten Pole geht, wenn die Verstärkung den in Lücke 37 bestimmten Wert erreicht (Achtung: positives Vorzeichen!). Das Bode-Diagramm in Abbildung 6 zeigt die Übertragungsfunktion des offenen (gestrichelte Linien) und geschlossenen (durchgezogene Linien) Regelkreises. Der Regler hebt die Phase an und führt zu einer Phasenreserve von  $\varphi_m = 53^\circ$  bei der Durchtrittskreisfrequenz  $\omega_c = 1.35 \text{ rad/s}$ .



WOK des geschlossenen Regelkreises ([FPE10, Abb. 7.36])

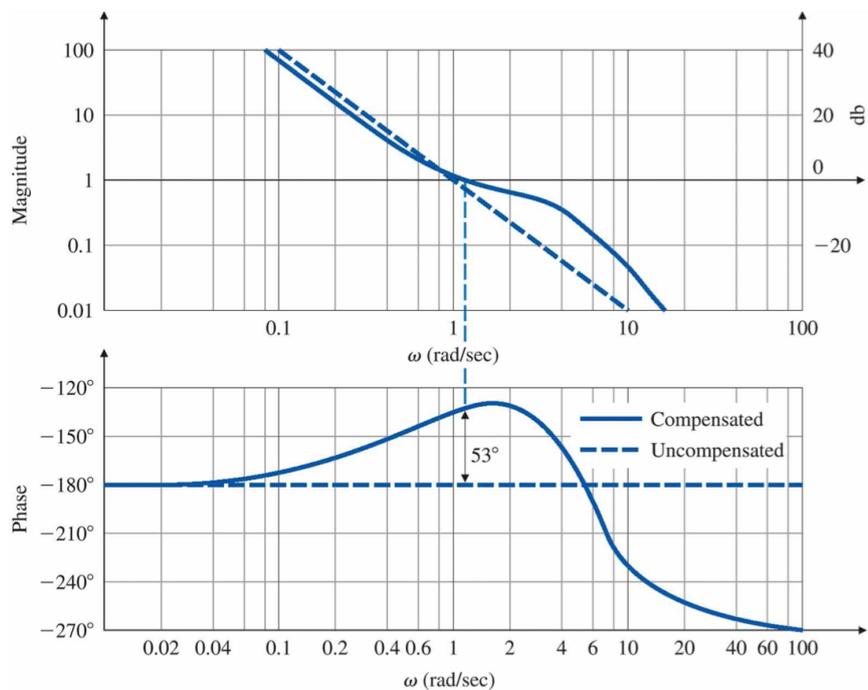
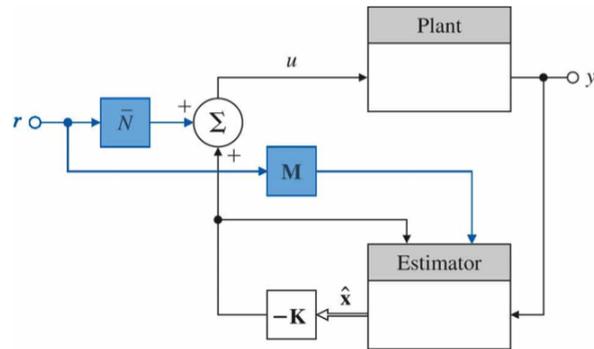


Abbildung 6: Bodediagramm offener und geschlossener Regelkreis ([FPE10, Abbildung 7.37])

Abbildung 7: Beobachter mit Referenzeingang  $r$  ([FPE10, Abbildung 7.49(a)])

### 5 Beobachter und Referenzsystem [FPE10, Kapitel 7.9]

Der letzte Schritt ist schließlich die Frage, wie wir Sollwerte ungleich Null erfüllen können? Zur Wiederholung nochmals die Gleichungen für Strecke und Regler inklusive Beobachter:

40 \_\_\_\_\_

Strecke:

41 \_\_\_\_\_

Regler:

Die Aufschaltung des Sollwerts  $r$  war mit Hilfe der Verstärkung  $\bar{N}$ . Jetzt führen wir  $r$  noch mit der Matrix  $M$  gemäß Abbildung 7 in den Beobachter und setzen beides in die Fehlerdynamik  $\dot{\epsilon} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$  ein:

42 \_\_\_\_\_

Für beliebige Werte von  $r$  kann der Schätzfehler also nur Null werden wenn wir

43 \_\_\_\_\_

wählen.

#### Literatur

[FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powell und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.