12 Zustandstransformation

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 12. November 2015, 9:56

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Zustandstransformation allgemein[1]

Betrachte ein System, das durch folgende Zustandsgleichungen beschrieben ist:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{G}u \tag{1a}$$
$$y = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + Ju \tag{1b}$$

Wie schon gezeigt ist dies nicht die einzige Beschreibung des dynamischen Systems. Wir betrachten eine Änderung des Zustands $\boldsymbol{x}$ zu einem neuen Zustand $\boldsymbol{z} =$ 1 ________ , der eine lineare Transformation von $\boldsymbol{x}$ mit der Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ ist. Lücke 1 in die Systemgleichung (1a) eingesetzt ergibt

2 ________

Dann setzen wir Lücke 1 noch in die Messgleichung (1b) ein.

3 ________

Das transformierte System ist somit

4 ________

[1] siehe [FPE10, Seite 446ff]

mit

$$\boldsymbol{A} = \quad \text{5 \_\_\_\_\_\_\_\_} \tag{2a}$$

$$\boldsymbol{B} = \quad \text{6 \_\_\_\_\_\_\_\_} \tag{2b}$$

$$\boldsymbol{C} = \quad \text{7 \_\_\_\_\_\_\_\_} \tag{2c}$$

$$D = \quad \text{8 \_\_\_\_\_\_\_\_} \tag{2d}$$

Weil $\boldsymbol{T}$ (unter der Bedingung *invertierbar*) beliebig ist, ist folgende Behauptung bestätigt:

> Jede Darstellung einer Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ entspricht unendlich vielen Darstellungen in Zustandsform.

Für die folgenden Transformationen suchen wir für die allgemeinen Matrizen $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ und $\boldsymbol{H}$ sowie den Skalar J *die* Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$, so dass $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ und D die gewünschte Form haben.

2 Regelungsnormalform

2.1 Transformation auf Regelungsnormalform

Zuerst formen wir Gleichung (2a) um zu

9 ________

Die Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ sei in Regelungsungsnormalform und die *inverse* Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}^{-1}$ beschreiben wir mit ihren *Zeilen*vektoren $\boldsymbol{t}_i^{\mathrm{T}}$, dann gilt bei einer Systemordnung von $n = 3$:

10 ________

Aus der ersten und zweiten Zeile in Lücke 10 folgt:

11 ________

Aus Gleichung (2b) folgt mit $\boldsymbol{B}$ in Regelungsnormalform:

12

Mit Lücke 11 folgt dann:

13

und damit

14

2.2 Steuerbarkeit

Dieses Ergebnis führt auf den Begriff der *Steuerbarkeit:* Das lineare Gleichungssystem

$$\boldsymbol{t}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hat dann und nur dann eine Lösung $\boldsymbol{t}_1^{\mathrm{T}}$, wenn die *Steuerbarkeitsmatrix*

15

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} =$$

invertiert werden kann. Das System kann somit dann und nur dann in die Regelungsnormalform überführt werden, wenn die Steuerbarkeitsmatrix $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ **nicht singulär** ist. Das System ist dann *steuerbar.*

2.3 Kochrezept

16

1. $\boldsymbol{\mathcal{C}} =$ $\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}}^{-1}$

17

2. $\boldsymbol{t}_1^{\mathrm{T}} =$

18

19

3. $\boldsymbol{T}^{-1} =$ $\boldsymbol{B} =$

20

21

4. $\boldsymbol{A} =$ $\boldsymbol{C} =$

Aufgabe: Zeige, dass sich die Steuerbarkeit eines Systems durch eine *nichtsinguläre* lineare Zustandstransformation *nicht* ändern lässt (siehe [FPE10, Seite 448f])!

22

3 Beobachtungsnormalform

3.1 Transformation auf Beobachtungsnormalform

Die Transformation auf Beobachtungsnormalform lässt sich dual zur Transformation auf Regelungsnormalform herleiten. Wir formen Gleichung (2a) diesmal um zu

23

Die Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ sei in Beobachtungsnormalform und die Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ (diesmal *nicht* ihre Inverse) teilen wir in ihre *Spalten*vektoren $\boldsymbol{t}_i$ auf. Für ein System 3. Ordnung gilt dann:

24

Aus der ersten und zweiten Zeile in Lücke 24 folgt:

25

Aus Gleichung (2c) folgt mit $\boldsymbol{C}$ in Beobachtungsnormalform:

26

Daraus folgt dann:

27

und damit

28

3.2 Beobachtbarkeit

Dual zur Steuerbarkeit gibt es den Begriff der *Beobachtbarkeit:* Das lineare Gleichungssystem

$$\boldsymbol{\mathcal{O}} \boldsymbol{t}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hat dann und nur dann eine Lösung $\boldsymbol{t}_1$, wenn die *Beobachtbarkeitsmatrix*

29

$$\boldsymbol{\mathcal{O}} =$$

invertiert werden kann. Das System kann somit dann und nur dann in die Beobachtungsnormalform überführt werden, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ **nicht singulär** ist. Das System ist dann *beobachtbar.*

3.3 Kochrezept

30

1. $\boldsymbol{\mathcal{O}} =$ $\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{O}}^{-1}$

31

2. $\boldsymbol{t}_1 =$

32 33

3. $\boldsymbol{T} =$ $\boldsymbol{C} =$

34 35

4. $\boldsymbol{A} =$ $\boldsymbol{B} =$

4 Modalform

4.1 Transformtion auf Modalform

Wir beschränken uns bei dieser Transformation auf einfache, reelle Pole. Wir setzen wie bei der Beobachtungsnormalform 36 an. Die Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ sei in Diagonalform und die Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ teilen wir wieder in ihre *Spalten*vektoren $\boldsymbol{t}_i$ auf. Für ein System 3. Ordnung gilt dann:

37

Dies kennen Sie als 38 -Problem aus der Vorlesung Mathematik 1. Weil die Modalform äquivalent zur Partialbruch-Darstellung der Übertragungsfunktion ist, sind die einzelnen Pole der Partialbrüche die 39 der Systemmatrix $\boldsymbol{F}$ und die Vektoren $\boldsymbol{t}_i$ die 40 von $\boldsymbol{F}$.

4.2 Analyse

Die Modalform erlaubt folgende Analyse:

- Wenn $b_i = 0$ ist, ist der Zustand x_i *nicht* steuerbar.
- Wenn $c_i = 0$ ist, ist der Zustand x_i *nicht* beobachtbar.

Die jeweilige Dimension des steuer- oder beobachtbaren Unterraums ist die Anzahl der steuer- oder beobachtbaren Zuständen.

4.3 Kochrezept

1. Berechnung der 41 λ_i von $\boldsymbol{F}$.
2. Berechnung von $\boldsymbol{T}$ über eine 42 von $\boldsymbol{F}$
3.

   43 $\boldsymbol{A} =$

   44 $\boldsymbol{B} =$

   45 $\boldsymbol{C} =$

5 Steuerbarkeit / Beobachtbarkeit

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s-z}{s^2+7s+12} = \frac{s-z}{(s+3)(s+4)}$$

Wenn $z = -3$ oder $= -4$ ist, dann kürzt sich die Nullstelle mit dem entsprechenden Pol. Wir untersuchen, wie sich das auf die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems auswirkt. Wir bestimmen dafür zuerst die Matrizen $\boldsymbol{A}_\mathrm{c}$, $\boldsymbol{B}_\mathrm{c}$ und $\boldsymbol{C}_\mathrm{c}$ in Regelungsnormalform und die dazugehörige *Beobachtbarkeitsmatrix* $\boldsymbol{\mathcal{O}}_\mathrm{c}$.

46 $\boldsymbol{A}_\mathrm{c} =$

47 $\boldsymbol{B}_\mathrm{c} =$

48 $\boldsymbol{C}_\mathrm{c} =$

49 $\boldsymbol{\mathcal{O}}_\mathrm{c} =$

Aus

50 $$\det \boldsymbol{\mathcal{O}}_c =$$

folgt, dass das System *nicht* beobachtbar ist, falls $z = -3$ oder $z = -4$ ist, das heißt wenn sich in $G(s)$ die Nullstelle mit einer Polstelle kürzt.

Nun bestimmen wir die entsprechenden Matrizen der Beobachtungsnormalform und die dazugehörige *Steuerbarkeitsmatrix* $\boldsymbol{\mathcal{C}}_\mathrm{o}$.

51 $\boldsymbol{A}_\mathrm{o} =$

52 $\boldsymbol{B}_\mathrm{o} =$

53 $\boldsymbol{C}_\mathrm{o} =$

54 $\boldsymbol{\mathcal{C}}_\mathrm{o} =$

Aus

55 $$\det \boldsymbol{\mathcal{C}}_o =$$

folgt, dass das System *nicht* steuerbar ist, falls $z = -3$ oder $z = -4$ ist, das heißt wenn sich in $G(s)$ die Nullstelle mit einer Polstelle kürzt.

Fazit: Eine Transformation eines Zustands beeinflusst *weder* die Steuer- *noch* die Beobachtbarkeit dieses Zustands. Zudem gilt:

- Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sind abhängig von der *Wahl* der Zustände.
- Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit lassen sich *nicht* anhand der Übertragungsfunktion bestimmen.
- Bei Pol-/Nullstellenkürzung in der Übertragungsfunktion ist das System je nach Realisierung nicht vollständig steuer- oder beobachtbar.

Literatur

[FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powel und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.