④ Polstellenlage und Frequenzgang

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 8. Oktober 2015, 09:13

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

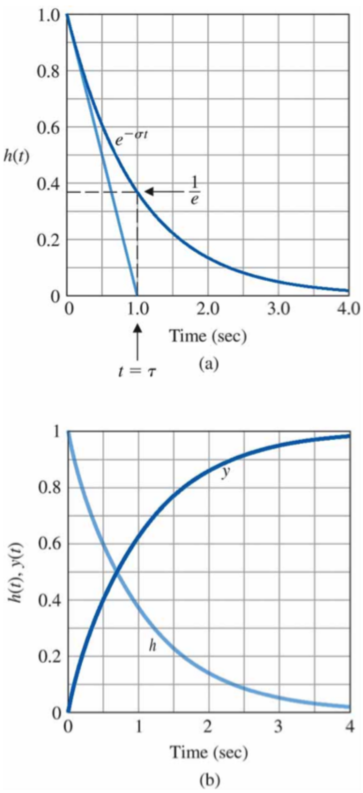
1 Bedeutung der Polstellenlage in der s-Ebene

Sobald die Übertragungsfunktion mit einer der verfügbaren Methoden bestimmt ist, können wir mit der Analyse des dynamischen Verhaltens beginnen. Wenn die Systemgleichungen lineare gewöhnliche Differentialgleichungen sind, dann ist die resultierende Übertragungsfunktion gebrochenrational, das heißt sie hat die Form

1

Der Bruch sei gekürzt, Zähler und Nenner haben somit keine gemeinsamen Nullstellen. Die Nullstellen des Nenners heißen *Pole.* Die *Nullstellen* und *Pole* beschreiben, bis auf einen konstanten Faktor, *vollständig* das Systemverhalten. Weil die Impulsantwort die korrespondierende Zeitfunktion zur Übertragungsfunktion ist, heißt sie auch *natürliche Antwort* des Systems.

1.1 System 1. Ordnung (PT$_1$-Glied)



2

1.2 System 2. Ordnung, PT$_2$-Glied

Komplexe Polpaare $s = -\sigma \pm i\omega_\mathrm{d}$ korrespondieren zum Nenner

3

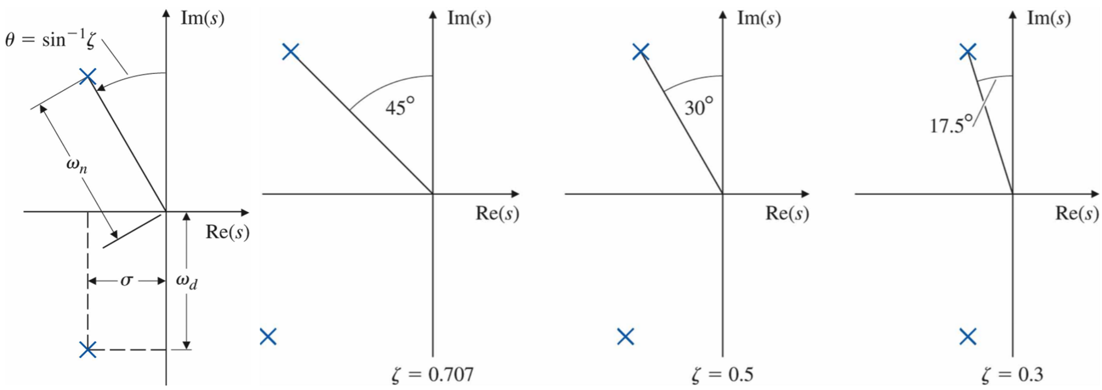
Übertragungsfunktionen mit komplexen Polen liegen häufig in der Form

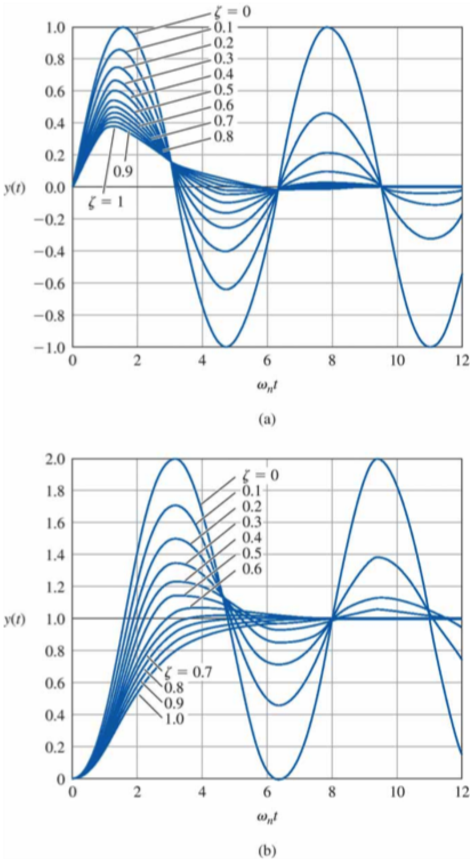
$$H(s) = \frac{\omega_\mathrm{n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_\mathrm{n}s + \omega_\mathrm{n}^2} \tag{1}$$

vor. Ein Koeffizientenvergleich ergibt

4

Die Pole dieser Übertragungsfunktion liegen somit auf einem Radius von ω_n in der s-Ebene mit einem Winkel von $\Theta = \arcsin \zeta$. Je kleiner der Winkel Θ ist, desto kleiner ist die Dämpfung. (Bilder aus ([FPE10, Fig. 3.17 und 3.19]))





Impuls- und Sprungantworten von Systemen 2. Ordnung ([FPE10, Fig. 3.18])

Mit Lücke 4 lässt sich die Übertragungsfunktion schreiben als

5 ____________________

Für die Impulsantwort ergibt sich aus der Korrespondenztabelle somit

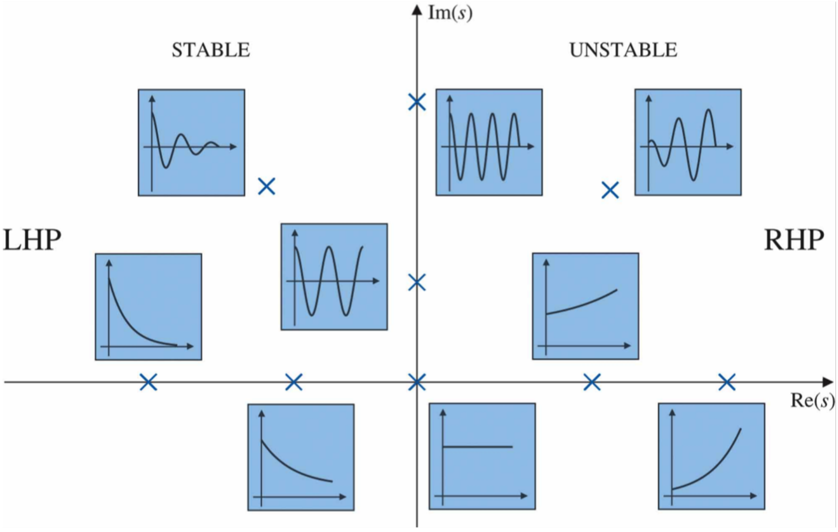
6 ____________________

Die Sprungantwort lässt sich mit der Korrespondenz

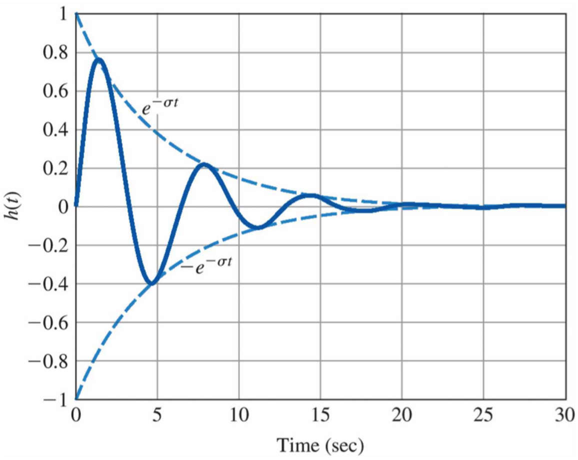
$$\frac{\sigma^2+\omega_\mathrm{d}^2}{s\left((s+\sigma)^2+\omega_\mathrm{d}^2\right)} \bullet\!\!-\!\!\circ\, 1-\mathrm{e}^{-\sigma t}\left(\cos\omega_\mathrm{d}t+\frac{\sigma}{\omega_\mathrm{d}}\sin\omega_\mathrm{d}t\right)$$

berechnen. Die nebenstehende Abbildung zeigt die Impuls- und Sprungantworten von Systemen 2. Ordnung mit komplexen Polen.

1.3 Übersicht Impulsantworten abhängig von der Polstellenlage

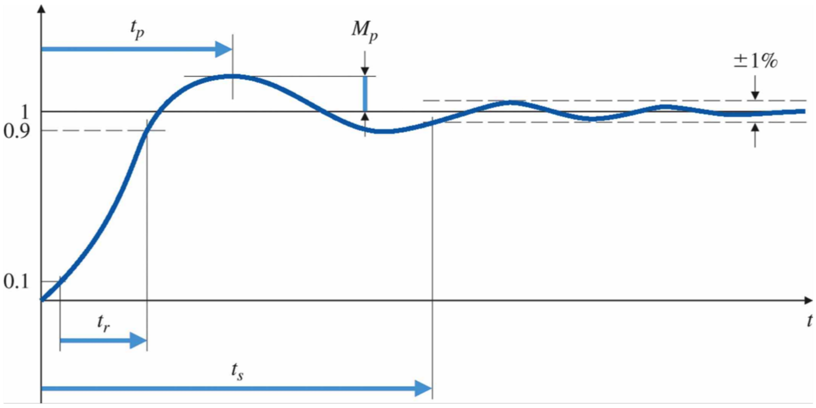


([FPE10, Fig. 3.15])



Exponentiell abklingende Impulsantwort eines Systems 2. Ordnung ([FPE10, Fig. 3.20]). Das Abklingen ist bestimmt durch $\sigma = \omega_\mathrm{n}\zeta$.

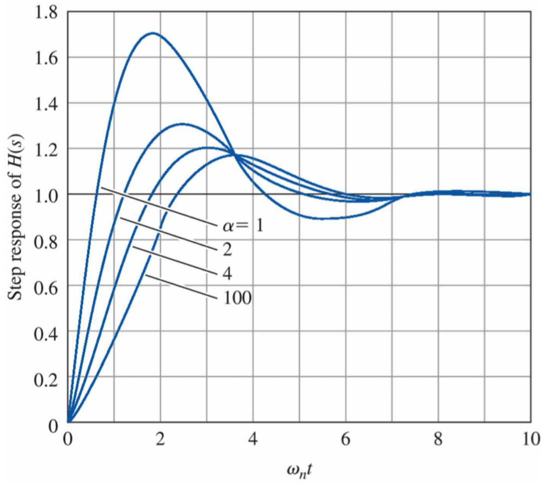
1.4 Kenngrößen im Zeitbereich



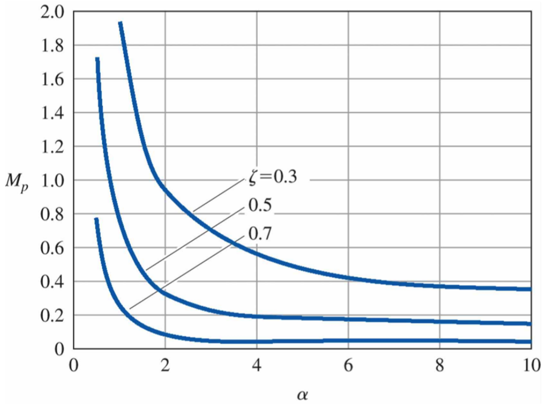
[FPE10, Fig. 3.22]

7

1.5 Effekt einer zusätzlichen Nullstelle in der LHE



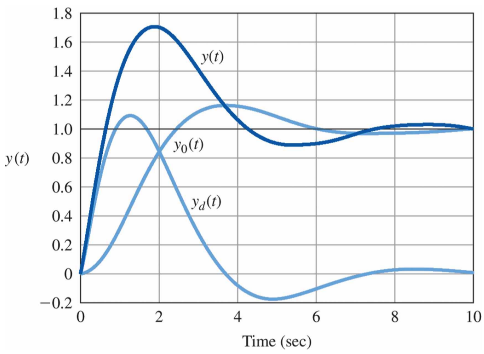
Sprungantworten von Systemen 2. Ordnung mit einer Nullstelle in Abhängigkeit der normierten Nullstellenlage α ($\zeta = 0.5$) [FPE10, Fig. 3.26]



Überschwingen als Funktion der normierten Nullstellenlage α. Für $\alpha = 1$ stimmt der Realteil von Null- und Polstellen überein. [FPE10, Fig. 3.26]

8

9



[FPE10, Fig. 3.28]

2 Frequenzgang

Stationäre Antwort eines linearen Systems auf sinusförmigen Eingang.

10 11

Euler: , Eingang:

Berechnung der Antwort durch Faltung und Superposition:

12

Das Ergebnis beinhaltet also die komplexe Übertragungsfunktion $H(i\omega)$, die auch in polarer Form mit Betrag und Phase als $H(i\omega) = M(\omega)\mathrm{e}^{i\varphi(\omega)}$, oder einfach $H = M\mathrm{e}^{i\varphi}$ dargestellt werden kann. Mit dieser Substitution folgt

13

Der Frequenzgang lässt sich auf zwei Arten graphisch darstellen:

- Als Betrag und Phase in Abhängigkeit von $\omega \Rightarrow$ Bode-Diagramm
- In der komplexen Ebene $\Rightarrow$ Nyquist-Diagramm

MATLAB®-Beispiel für Bode-Plot von $H(s) = \dfrac{1}{s+k}$ mit $k = 1$:

```
k=1;
numH=1;               % Zähler
denH=[1 k];           % Nenner
sysH=tf(numH,denH)    % Definition der Ü-Funktion
w=logspace(-2,2);     % 50 Frequenzwerte von 10^-2 bis 10^2
bode(sysH,w);         % Bode-Plot erzeugen
```

Literatur

[FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powel und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.