③ Das dynamische Verhalten von Systemen Übungen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 15. Oktober 2014, 17:04

Aufgabe 1: Review-Fragen

[FPE10, Seite 169]

1. Was ist die Definition von *Übertragungsfunktion (transfer function)*?
2. Welche Eigenschaften haben Systeme, die sich mit Transferfunktionen beschreiben lassen?
3. Was besagt der 2. Grenzwertsatz (Final Value Theorem) und wozu wird er in der Regelungstechnik angewendet?

Aufgabe 2: Übungsaufgaben

[FPE10, Seite 170ff]

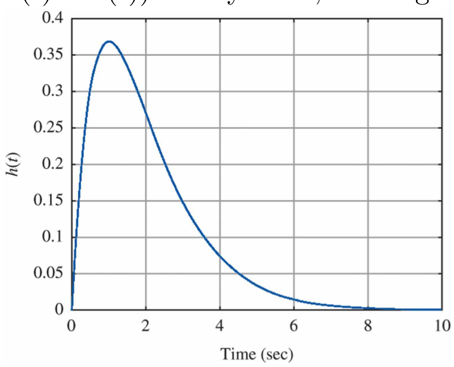
Aufgabe 2.1: Laplace-Transformation

1. Bestimmen Sie die Laplace-Transformation folgender zeitabhängiger Funktionen:
   a) $f(t) = 1 + 3t$
   b) $f(t) = 2 + 5t + t^2 + \delta(t)$
   c) $f(t) = \mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t} + t\mathrm{e}^{-3t}$
   d) $f(t) = (t+2)^2$
   e) $f(t) = \cosh t$
2. Bestimmen Sie die Laplace-Transformation folgender zeitabhängiger Funktionen:
   a) $f(t) = 2\cos 5t$
   b) $f(t) = \sin 3t + 2\cos 3t + \mathrm{e}^{-t}\sin 2t$
   c) $f(t) = t + \mathrm{e}^{-2t}\sin 3t$

3. Bestimmen Sie die Laplace-Transformation folgender zeitabhängiger Funktionen:
   a) $f(t) = t \sin 2t$
   b) $f(t) = t \cos 2t$
   c) $f(t) = t\mathrm{e}^{-t} + 3t \cos t$
   d) $f(t) = t \sin 3t - t \cos t$
   e) $f(t) = 1(t) + 2t \cos 5t$
4. Bestimmen Sie die korrespondierende Zeitfunktion zu jeder der folgenden Laplace-Transformierten mit Hilfe der Partialbruchzerlegung:
   a) $F(s) = \dfrac{2}{s(s+2)}$
   b) $F(s) = \dfrac{10}{s(s+1)(s+10)}$
   c) $F(s) = \dfrac{3s+2}{s^2+4s+20}$
   d) $F(s) = \dfrac{3s^2+9s+12}{(s+2)(s^2+5s+11)}$
   e) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+9}$
   f) $F(s) = \dfrac{2(s+2)}{(s+1)(s^2+4)}$
   g) $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2}$
   h) $F(s) = \dfrac{1}{s^5}$
   i) $F(s) = \dfrac{4}{s^4+4}$
   j) $F(s) = \dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2}$
5. Bestimmen Sie die korrespondierende Zeitfunktion zu jeder der folgenden Laplace-Transformierten:
   a) $F(s) = \dfrac{1}{s(s+2)^2}$
   b) $F(s) = \dfrac{2s^2+s+1}{s^3-1}$
   c) $F(s) = \dfrac{2(s^2+s+1)}{s(s+1)^2}$
   d) $F(s) = \dfrac{s^3+2s+4}{s^4-16}$
   e) $F(s) = \dfrac{2(s+2)(s+5)^2}{(s+1)(s^2+4)^2}$
   f) $F(s) = \dfrac{(s^2-1)}{(s+1)^2}$

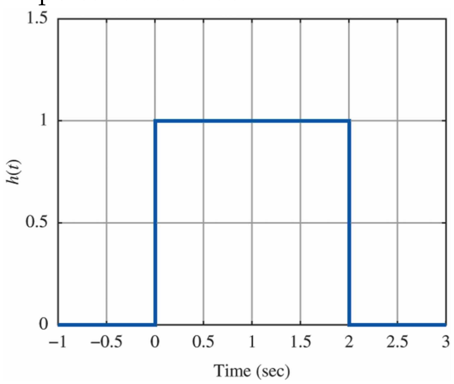
6. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation:
   a) $\ddot{y} + \dot{y} + 3y = 0,\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 2$
   b) $\ddot{y} - 2\dot{y} + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 2$
   c) $\ddot{y} + \dot{y} = \sin t,\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 2$
   d) $\ddot{y} + 3\dot{y} = \sin t,\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 2$
   e) $\ddot{y} + 2\dot{y} = \mathrm{e}^{t},\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 2$
   f) $\ddot{y} + y = t,\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 2$

7. Bestimmen Sie mit Hilfe des Faltungsintegrals die Sprungantwort (also die Antwort für $u(t) = 1(t)$) des Systems, das folgende Impulsantwort hat:



$$h(t) = \begin{cases} t\mathrm{e}^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

8. Bestimmen Sie mit Hilfe des Faltungsintegrals die Sprungantwort des Systems, das folgende Impulsantwort hat:



$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & t < 0 \text{ und } t > 2 \end{cases}$$

Aufgabe 2.2: Blockdiagramme

9. Betrachten Sie das Blockdiagramm in Abbildung 1. Beachten Sie, dass a_i und b_i Konstanten sind. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion für dieses System. Diese spezielle Struktur heißt *Regelungsnormalform*, die nächstes Semester ein Thema sein wird.

10. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen der Blockdiagramme in Abbildung 2

11. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Blockdiagramme in Abbildung 3, indem Sie die Blockdiagramme vereinfachen. Die spezielle Struktur in Abbildung 3(b) heißt *Beobachtungsnormalform*, die wir ebenfalls nächstes Semester behandeln werden.

12. Nutzen Sie Blockdiagramm-Algebra, um die Übertragungsfunktion zwischen $R(s)$ und $Y(s)$ in Abbildung 4 zu bestimmen.

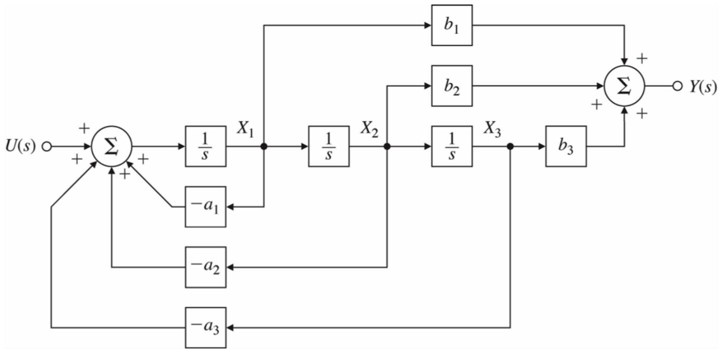


Abbildung 1: [FPE10, Fig. 3.52, Seite 175]

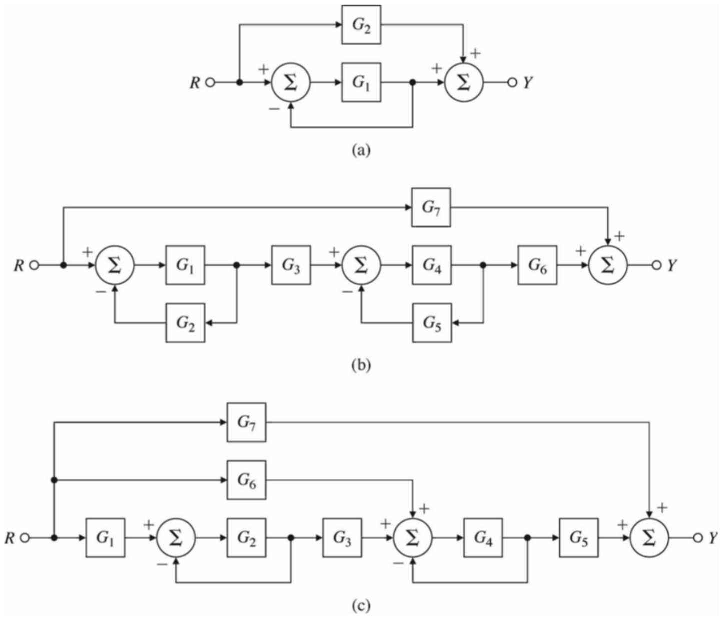


Abbildung 2: [FPE10, Fig. 3.53, Seite 175]

Literatur

[FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powel und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.

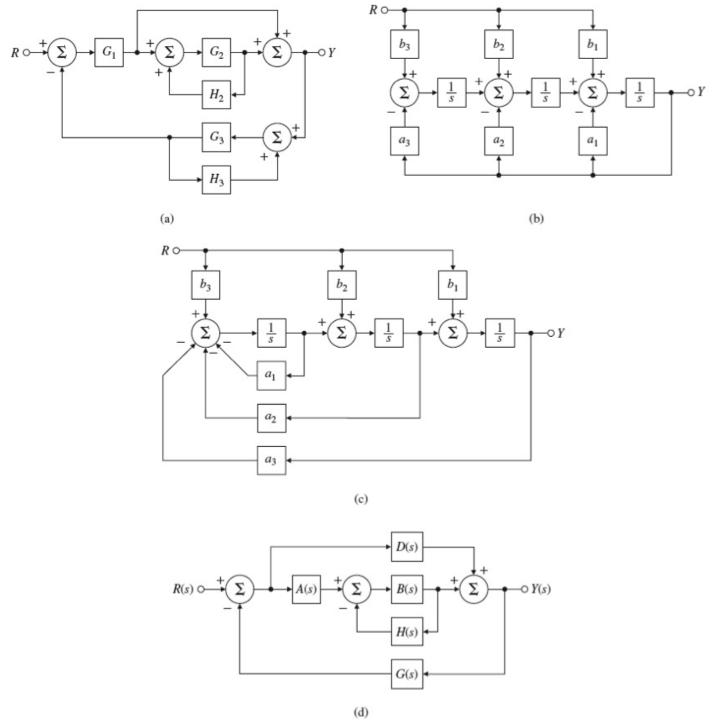


Abbildung 3: [FPE10, Fig. 3.54, Seite 176]

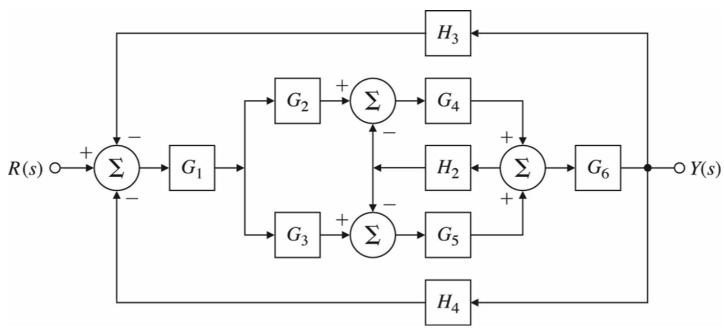


Abbildung 4: [FPE10, Fig. 3.55, Seite 177]

Lösung 1:

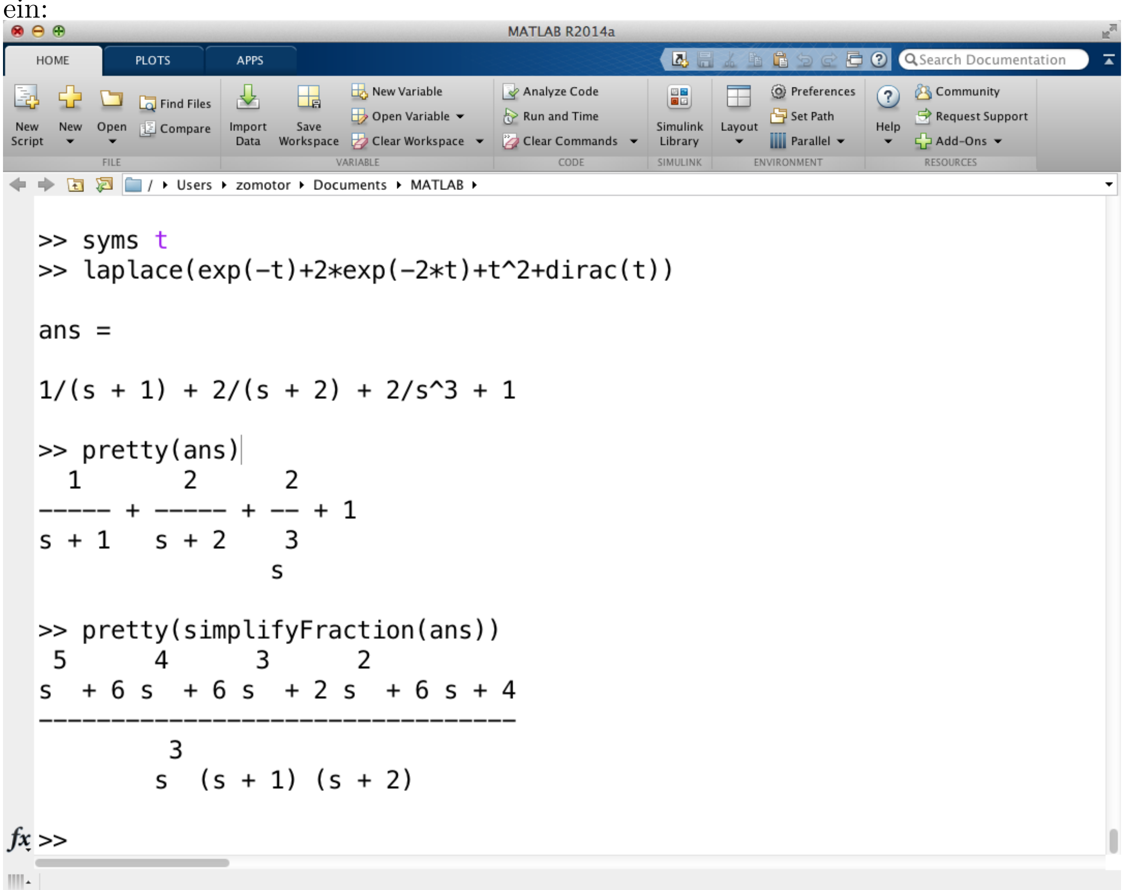
Lösung 2:

Lösung 2.1:

1. Um mit Matlab die Aufgaben zu lösen, benötigen Sie folgende Befehle:

`syms`	Definition symbolischer Variablen
`laplace`	LaplaceTransformation
`simplifyFraction`	Umwandlung in einen Bruch
`simplify`	Vereinfachung
`pretty`	Lesbarere Darstellung
`exp(t)`	Exponentialfunktion e^t
`dirac(t)`	Dirac'sche Impulsfunktion $\delta(t)$

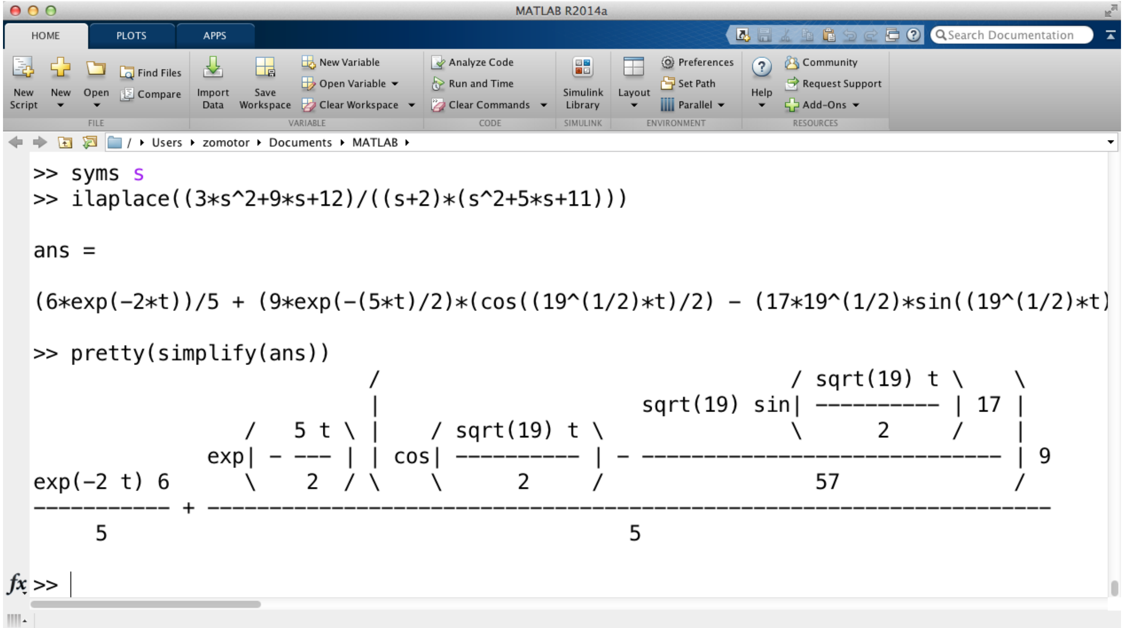
   Beispiel (die Variable `ans` enthält das letzte Ergebnis): Zu Beginn der Matlab-Sitzung definieren einmal die symbolische Variable mit » `syms t` und geben dann folgende Befehle ein:



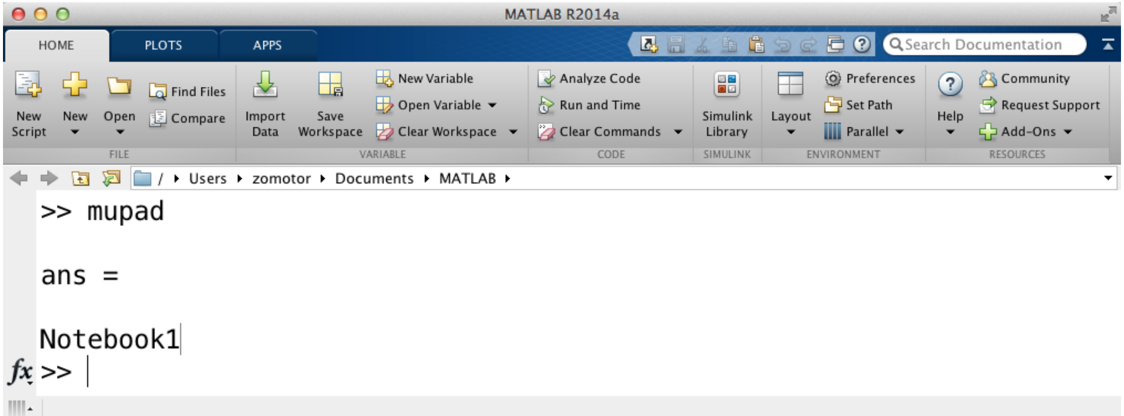
2. Siehe 1.

3. Siehe 1.

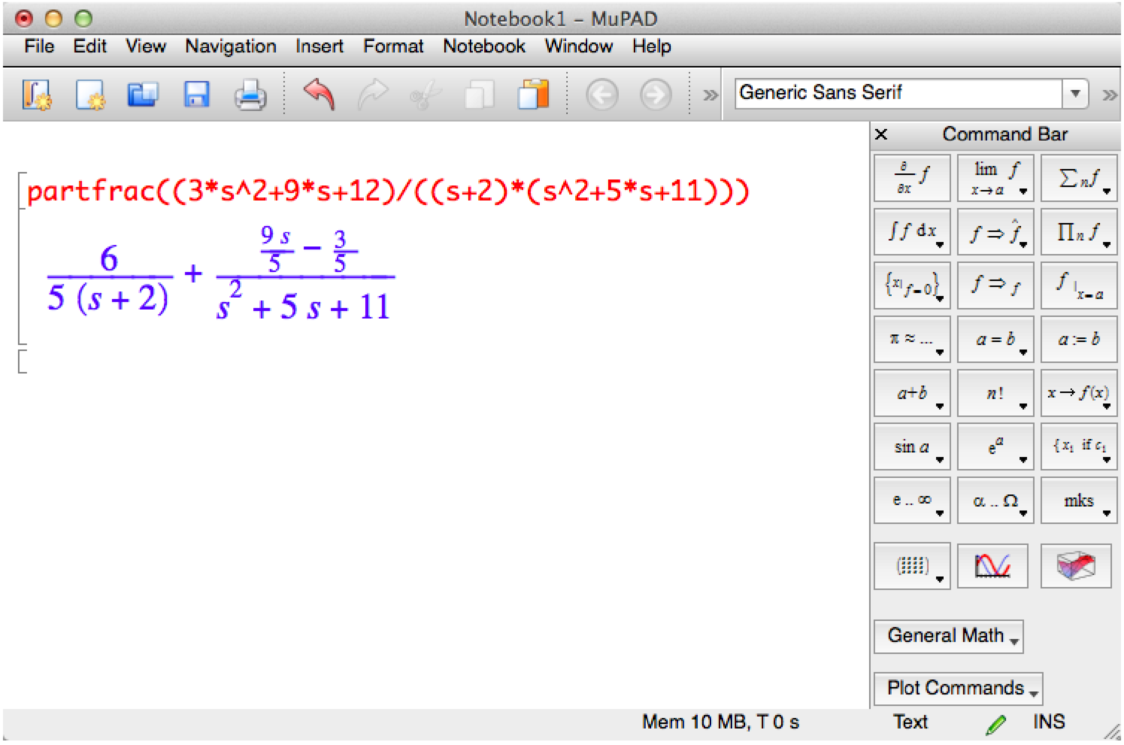
4. Nutzen Sie `ilaplace` zur Rücktransformation in den Zeitbereich. Vorher müssen Sie noch wie in 1 die symbolische Variable `s` definieren. Beispiel:



Zur Bestimmung der Partialbrüche nutzen Sie `mupad`: Geben Sie den Befehl `mupad` in der Matlab-Konsole ein



Es öffnet sich das Mupad-Fenster, in dem sich die Partialbruchzerlegung mit Hilfe des Befehls `partfrac` bestimmen lässt. Beispiel:

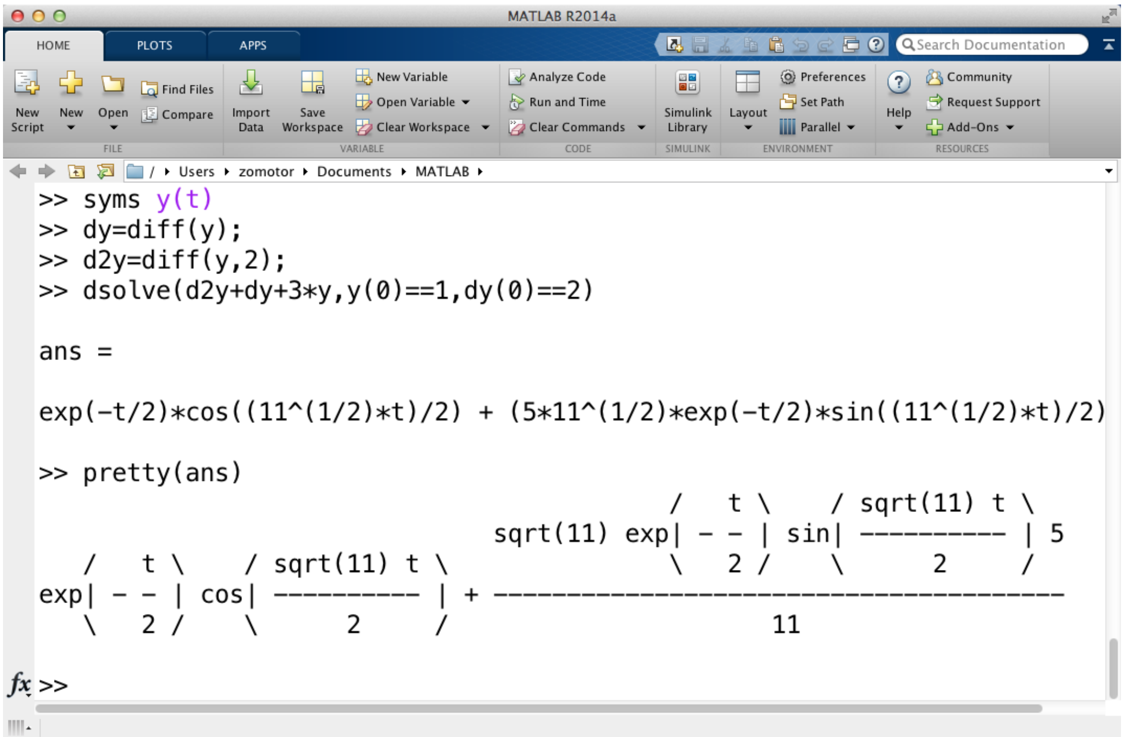


5. Siehe 4.

6. Mit folgenden zusätzlichen Befehlen lassen sich Differentialgleichungen lösen:

`dsolve`	Lösung von Differentialgleichungen
`diff(y(t))`	Ableitung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$
`diff(y(t),2)`	2. Ableitung $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$

Beispiel:



7.

$$y(t) = \begin{cases} 1-(t+1)\mathrm{e}^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

8.

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & t \geq 2 \end{cases}$$

Lösung 2.2:

$$\frac{Y}{U} = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

a)

$$\frac{Y}{U} = \frac{G_1}{1+G_1} + G_2$$

b)

$$\frac{Y}{U} = G_7 + \frac{G_1 G_3 G_4 G_6}{(1+G_1 G_2)(1+G_4 G_5)}$$

c)

$$\frac{Y}{U} = G_7 + \frac{G_4 G_5 G_6}{1 + G_4} + \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2} \cdot \frac{G_4 G_5}{1 + G_4}$$