

③ Das dynamische Verhalten von Systemen Übungen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 15. Oktober 2014, 17:04



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Aufgabe 1: Review-Fragen

[FPE10, Seite 169]

1. Was ist die Definition von *Übertragungsfunktion (transfer function)?*
2. Welche Eigenschaften haben Systeme, die sich mit Transferfunktionen beschreiben lassen?
3. Was besagt der 2. Grenzwertsatz (Final Value Theorem) und wozu wird er in der Regelungstechnik angewendet?

Aufgabe 2: Übungsaufgaben

[FPE10, Seite 170ff]

Aufgabe 2.1: Laplace-Transformation

1. Bestimmen Sie die Laplace-Transformation folgender zeitabhängiger Funktionen:
 - a) $f(t) = 1 + 3t$
 - b) $f(t) = 2 + 5t + t^2 + \delta(t)$
 - c) $f(t) = e^{-t} + 2e^{-2t} + te^{-3t}$
 - d) $f(t) = (t + 2)^2$
 - e) $f(t) = \cosh t$
2. Bestimmen Sie die Laplace-Transformation folgender zeitabhängiger Funktionen:
 - a) $f(t) = 2 \cos 5t$
 - b) $f(t) = \sin 3t + 2 \cos 3t + e^{-t} \sin 2t$
 - c) $f(t) = t + e^{-2t} \sin 3t$

3. Bestimmen Sie die Laplace-Transformation folgender zeitabhängiger Funktionen:

- a) $f(t) = t \sin 2t$
- b) $f(t) = t \cos 2t$
- c) $f(t) = te^{-t} + 3t \cos t$
- d) $f(t) = t \sin 3t - t \cos t$
- e) $f(t) = 1(t) + 2t \cos 5t$

4. Bestimmen Sie die korrespondierende Zeitfunktion zu jeder der folgenden Laplace-Transformierten mit Hilfe der Partialbruchzerlegung:

- a) $F(s) = \frac{2}{s(s+2)}$
- b) $F(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$
- c) $F(s) = \frac{3s+2}{s^2+4s+20}$
- d) $F(s) = \frac{3s^2+9s+12}{(s+2)(s^2+5s+11)}$
- e) $F(s) = \frac{1}{s^2+9}$
- f) $F(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s^2+4)}$
- g) $F(s) = \frac{s+1}{s^2}$
- h) $F(s) = \frac{1}{s^5}$
- i) $F(s) = \frac{4}{s^4+4}$
- j) $F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2}$

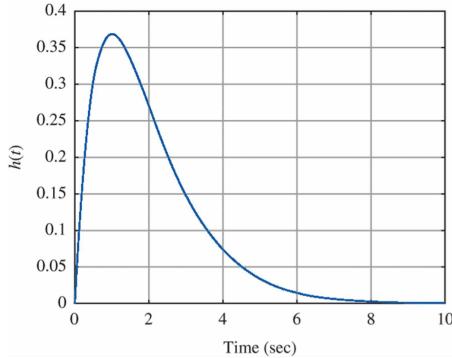
5. Bestimmen Sie die korrespondierende Zeitfunktion zu jeder der folgenden Laplace-Transformierten:

- a) $F(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}$
- b) $F(s) = \frac{2s^2+s+1}{s^3-1}$
- c) $F(s) = \frac{2(s^2+s+1)}{s(s+1)^2}$
- d) $F(s) = \frac{s^3+2s+4}{s^4-16}$
- e) $F(s) = \frac{2(s+2)(s+5)^2}{(s+1)(s^2+4)^2}$
- f) $F(s) = \frac{(s^2-1)}{(s+1)^2}$

6. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation:

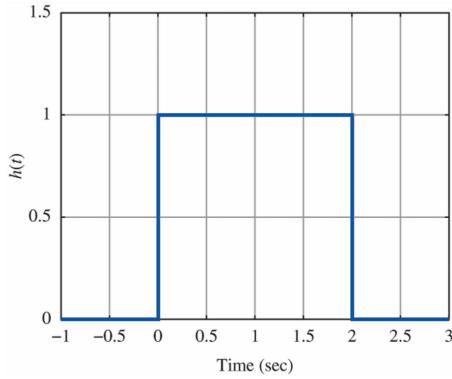
- a) $\ddot{y} + \dot{y} + 3y = 0, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$
- b) $\ddot{y} - 2\dot{y} + 4y = 0, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$
- c) $\ddot{y} + \dot{y} = \sin t, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$
- d) $\ddot{y} + 3\dot{y} = \sin t, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$
- e) $\ddot{y} + 2\dot{y} = e^t, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$
- f) $\ddot{y} + y = t, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 2$

7. Bestimmen Sie mit Hilfe des Faltungsintegrals die Sprungantwort (also die Antwort für $u(t) = 1(t)$) des Systems, das folgende Impulsantwort hat:



$$h(t) = \begin{cases} te^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

8. Bestimmen Sie mit Hilfe des Faltungsintegrals die Sprungantwort des Systems, das folgende Impulsantwort hat:



$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & t < 0 \text{ und } t > 2 \end{cases}$$

Aufgabe 2.2: Blockdiagramme

9. Betrachten Sie das Blockdiagramm in Abbildung 1. Beachten Sie, dass a_i und b_i Konstanten sind. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion für dieses System. Diese spezielle Struktur heißt *Regelungsnormalform*, die nächstes Semester ein Thema sein wird.
10. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen der Blockdiagramme in Abbildung 2
11. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Blockdiagramme in Abbildung 3, indem Sie die Blockdiagramme vereinfachen. Die spezielle Struktur in Abbildung 3(b) heißt *Beobachtungsnormalform*, die wir ebenfalls nächstes Semester behandeln werden.
12. Nutzen Sie Blockdiagramm-Algebra, um die Übertragungsfunktion zwischen $R(s)$ und $Y(s)$ in Abbildung 4 zu bestimmen.

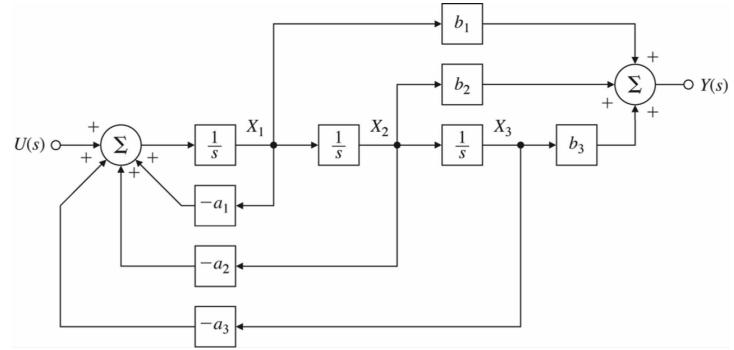


Abbildung 1: [FPE10, Fig. 3.52, Seite 175]

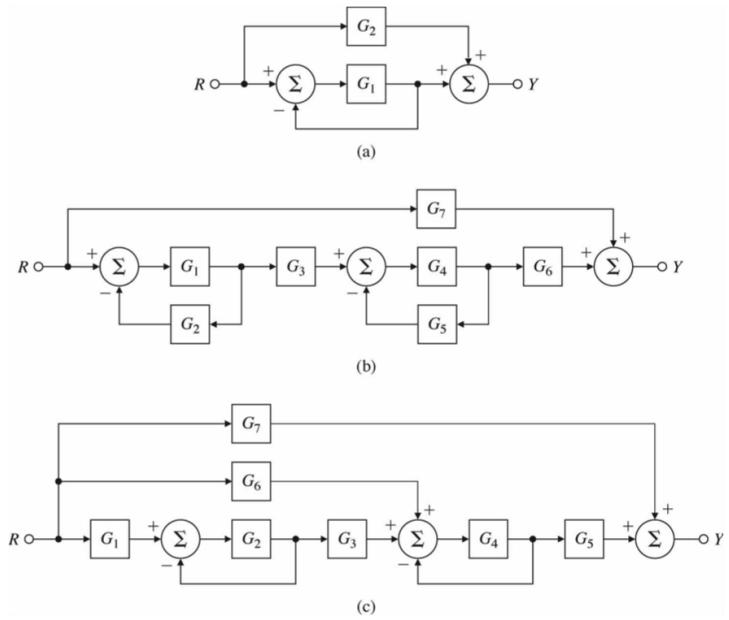


Abbildung 2: [FPE10, Fig. 3.53, Seite 175]

Literatur

- [FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powel und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.

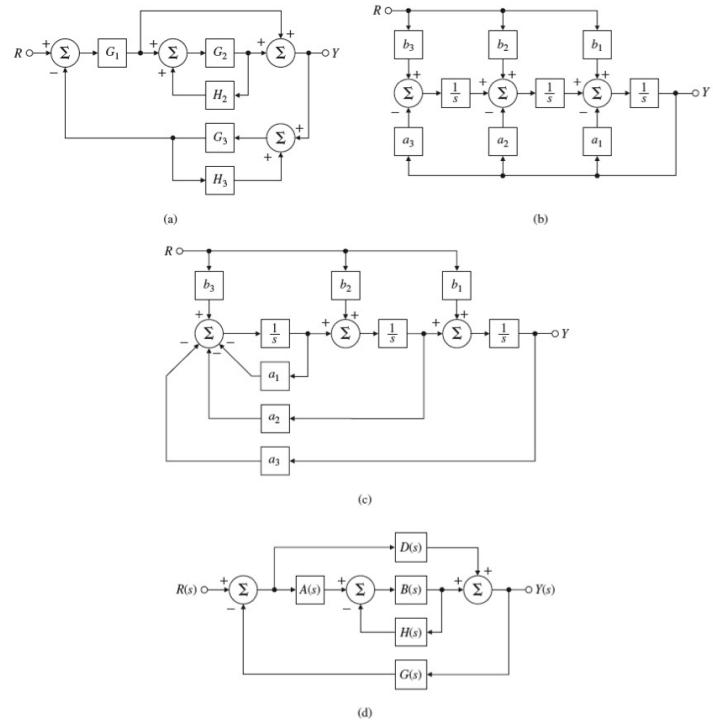


Abbildung 3: [FPE10, Fig. 3.54, Seite 176]

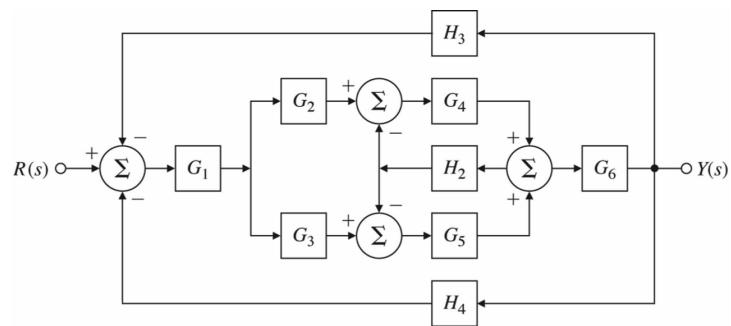


Abbildung 4: [FPE10, Fig. 3.55, Seite 177]

Lösung 1:

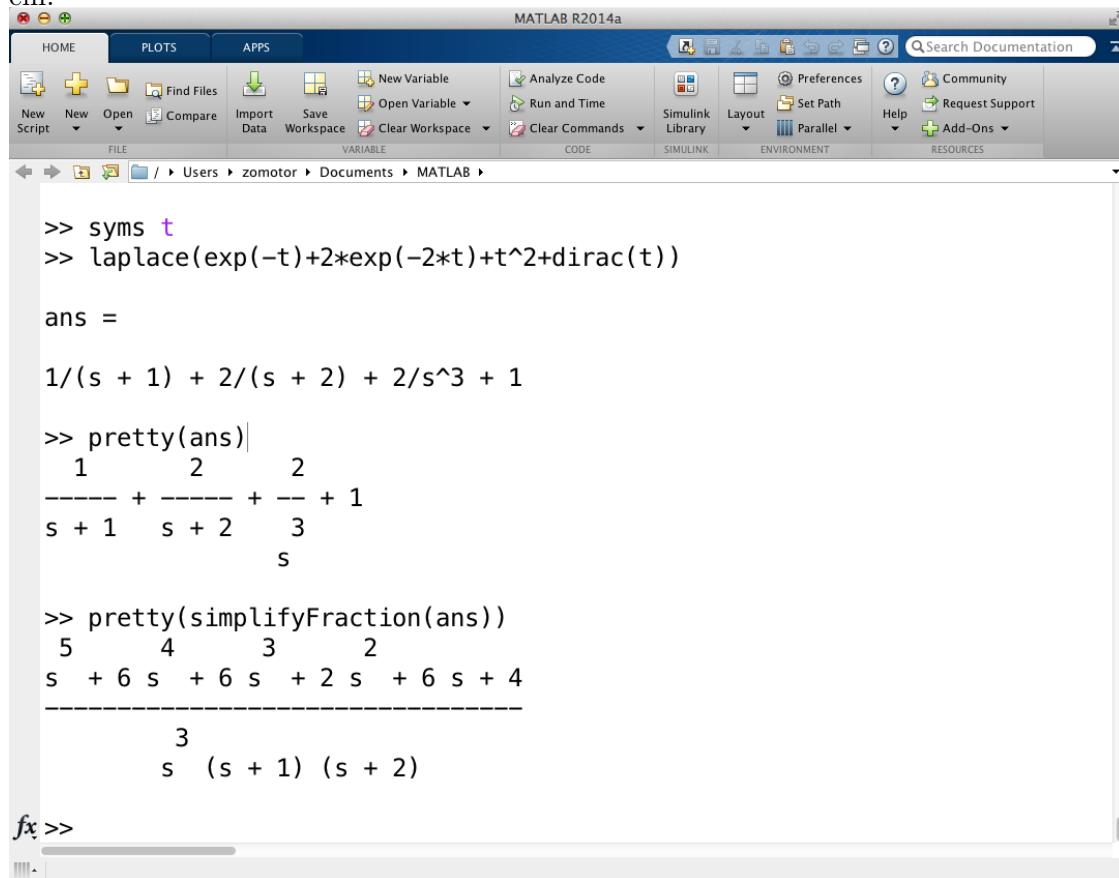
Lösung 2:

Lösung 2.1:

- Um mit Matlab die Aufgaben zu lösen, benötigen Sie folgende Befehle:

<code>syms</code>	Definition symbolischer Variablen
<code>laplace</code>	LaplaceTransformation
<code>simplifyFraction</code>	Umwandlung in einen Bruch
<code>simplify</code>	Vereinfachung
<code>pretty</code>	Lesbarere Darstellung
<code>exp(t)</code>	Exponentialfunktion e^t
<code>dirac(t)</code>	Dirac'sche Impulsfunktion $\delta(t)$

Beispiel (die Variable `ans` enthält das letzte Ergebnis): Zu Beginn der Matlab-Sitzung definieren einmal die symbolische Variable mit » `syms t` und geben dann folgende Befehle ein:



The screenshot shows the MATLAB R2014a interface. The command window displays the following code and its execution results:

```
>> syms t
>> laplace(exp(-t)+2*exp(-2*t)+t^2+dirac(t))

ans =

1/(s + 1) + 2/(s + 2) + 2/s^3 + 1

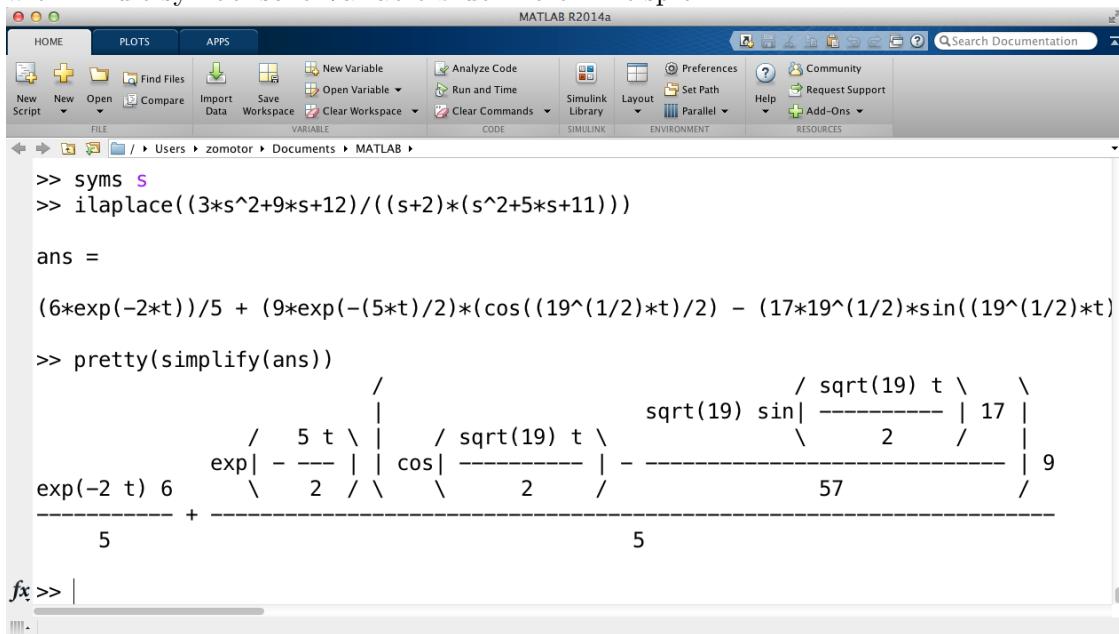
>> pretty(ans)
  1   2   2
----- + ----- + -- + 1
s + 1   s + 2   3
                  s

>> pretty(simplifyFraction(ans))
  5   4   3   2
s  + 6 s  + 6 s  + 2 s  + 6 s + 4
-----
  3
s  (s + 1) (s + 2)

fx >>
```

- Siehe 1.
- Siehe 1.

4. Nutzen Sie `ilaplace` zur Rücktransformation in den Zeitbereich. Vorher müssen Sie noch wie in 1 die symbolische Variable `s` definieren. Beispiel:



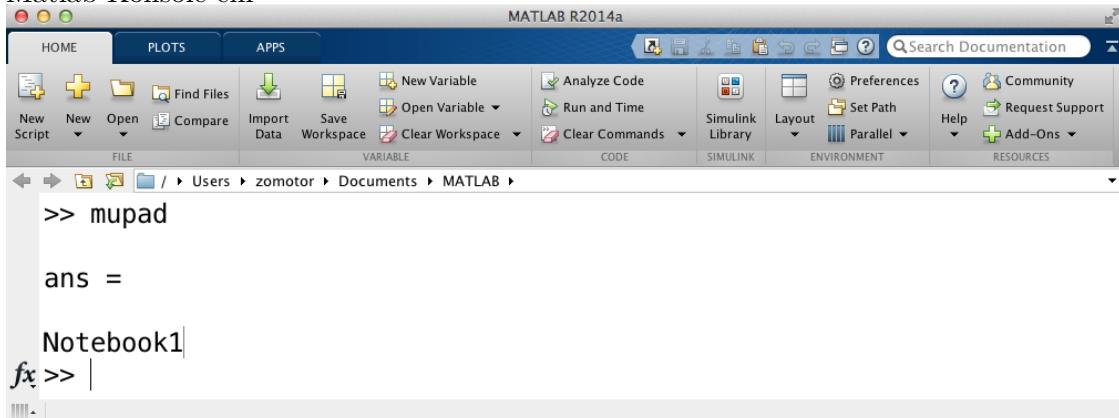
The screenshot shows the MATLAB R2014a interface with the command window open. The command window displays the following code and its output:

```

>> syms s
>> ilaplace((3*s^2+9*s+12)/((s+2)*(s^2+5*s+11)))
ans =
(6*exp(-2*t))/5 + (9*exp(-(5*t)/2)*(cos((19^(1/2)*t)/2) - (17*19^(1/2)*sin((19^(1/2)*t)
>> pretty(simplify(ans))
      /           / sqrt(19) sin|-----| 17 |
      / 5 t \ | cos|-----| 2 /   |-----| 9
exp| - --- | | \sqrt(19) t \ | 57
----- + -----
      5           5

```

Zur Bestimmung der Partialbrüche nutzen Sie `mupad`: Geben Sie den Befehl `mupad` in der Matlab-Konsole ein



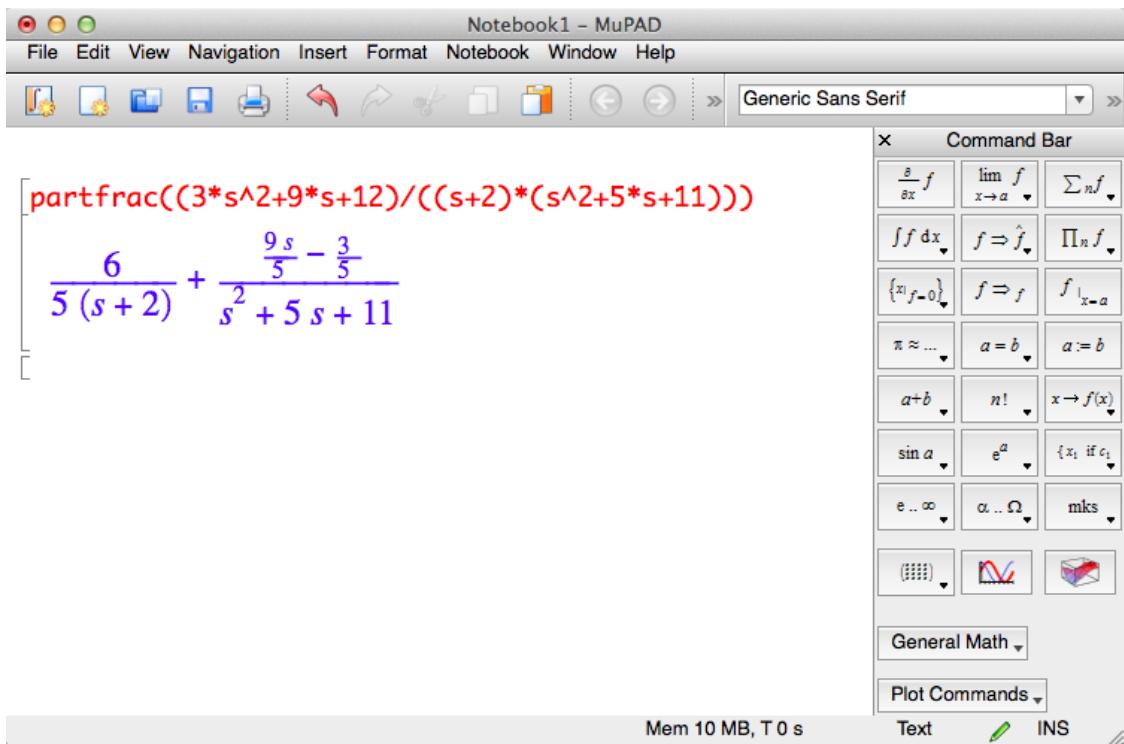
The screenshot shows the MATLAB R2014a interface with the command window open. The command window displays the following code:

```

>> mupad
ans =
Notebook1
fx >> |

```

Es öffnet sich das Mupad-Fenster, in dem sich die Partialbruchzerlegung mit Hilfe des Befehls `partfrac` bestimmen lässt. Beispiel:



5. Siehe 4.

6. Mit folgenden zusätzlichen Befehlen lassen sich Differentialgleichungen lösen:

`dsolve` Lösung von Differentialgleichungen

`diff(y(t))` Ableitung $\frac{dy}{dt}$

`diff(y(t),2)` 2. Ableitung $\frac{d^2y}{dt^2}$

Beispiel:

The screenshot shows the MATLAB R2014a interface. In the command window, the following code is entered and executed:

```

>> syms y(t)
>> dy=diff(y);
>> d2y=diff(y,2);
>> dsolve(d2y+dy+3*y,y(0)==1,dy(0)==2)

ans =
exp(-t/2)*cos((11^(1/2)*t)/2) + (5*11^(1/2)*exp(-t/2)*sin((11^(1/2)*t)/2)

>> pretty(ans)
      /   t \   / sqrt(11) t \
sqrt(11) exp| - - | sin| ----- | 5
      \   2 /   \ 2           11
exp| - - | cos| ----- | + -----
      \ 2 /   \ 2           /

```

7.

$$y(t) = \begin{cases} 1 - (t + 1)e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

8.

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & t \geq 2 \end{cases}$$

Lösung 2.2:

$$\frac{Y}{U} = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

a)

$$\frac{Y}{U} = \frac{G_1}{1 + G_1} + G_2$$

b)

$$\frac{Y}{U} = G_7 + \frac{G_1 G_3 G_4 G_6}{(1 + G_1 G_2)(1 + G_4 G_5)}$$

c)

$$\frac{Y}{U} = G_7 + \frac{G_4 G_5 G_6}{1 + G_4} + \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2} \cdot \frac{G_4 G_5}{1 + G_4}$$