Regelungstechnik 1
Klausur vom 19.12.2013

Zoltán Zomotor

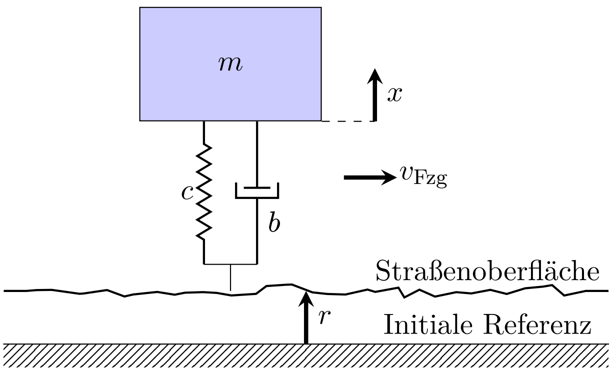
Versionsstand: 30. Januar 2014, 12:59

Name	Vorname

Drei Punkte pro Aufgabe, acht Aufgaben. Mindestpunktzahl zum Bestehen: 10 Punkte. Hilfsmittel: nicht programmierbarer Taschenrechner sowie maximal acht einseitig oder vier beidseitig beschriftete DIN-A4-Spickzettel beliebigen Inhalts, möglichst selbst verfasst oder zusammengestellt; kein Skript, keine andere Formelsammlung, kein Computer, kein Mobiltelefon. Sie dürfen *mit Blei- oder Bunststiften zeichnen!*

Kochrezepte

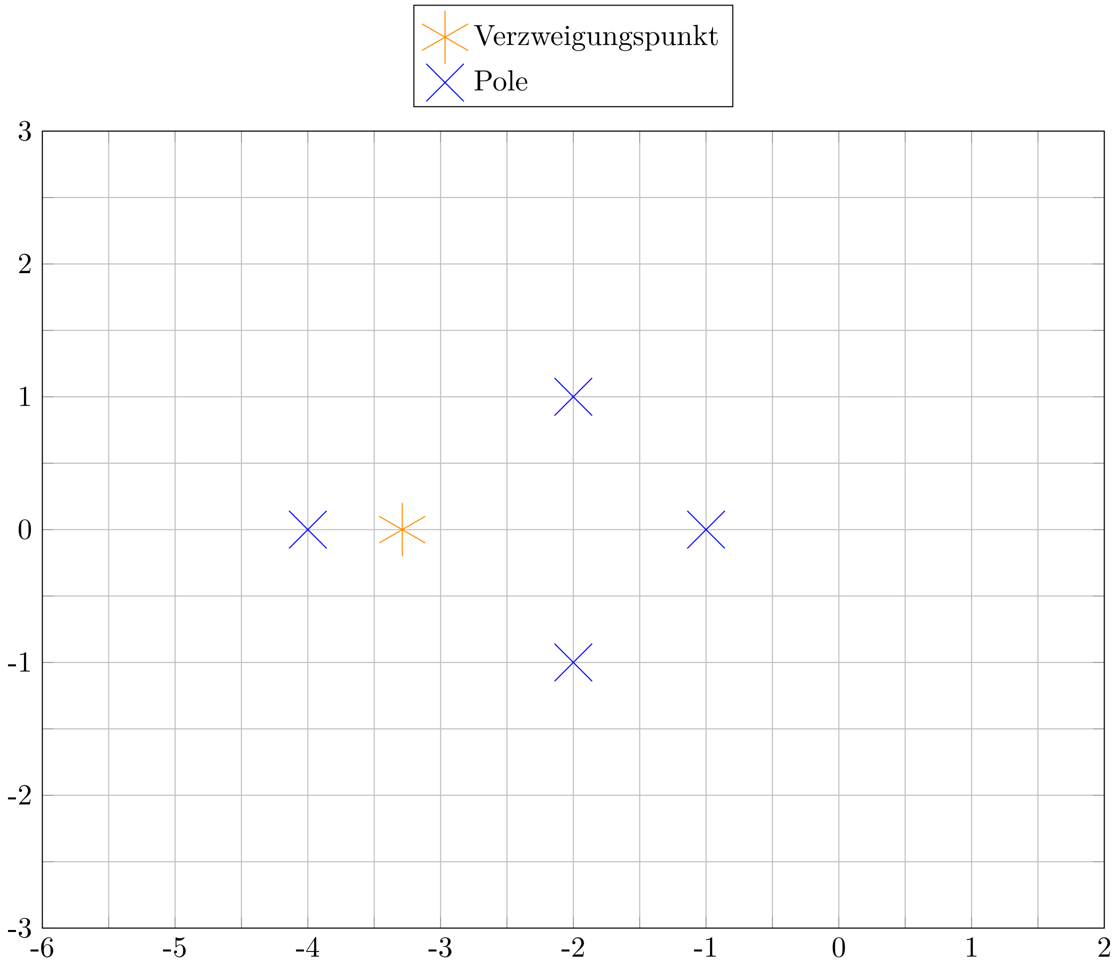
1. Das Bild zeigt ein Viertelfahrzeugmodell, bei dem die Radmasse vernachlässigt und die Raddämpfung und -federung in der Federkonstante c und dem Dämpfungsbeiwert b berücksichtigt sind. Schneiden Sie den Körper frei, bestimmen Sie die inhomogene Differentialgleichung für x und die Übertragungsfunktion $\frac{X(s)}{R(s)}$ von der Straßenkoordinate r zur Fahrzeugkoordinate x.



2. Bestimmen Sie den Bereich, in dem die Wurzelortskurve auf der reellen Achse verläuft und berechnen Sie den reellen Verzweigungspunkt für

$$G(s) = K\frac{1}{s^3 + 3\,s^2 + 2s}$$

3. Gegeben ist folgendes Diagramm zur Konstruktion der Wurzelortskurve.



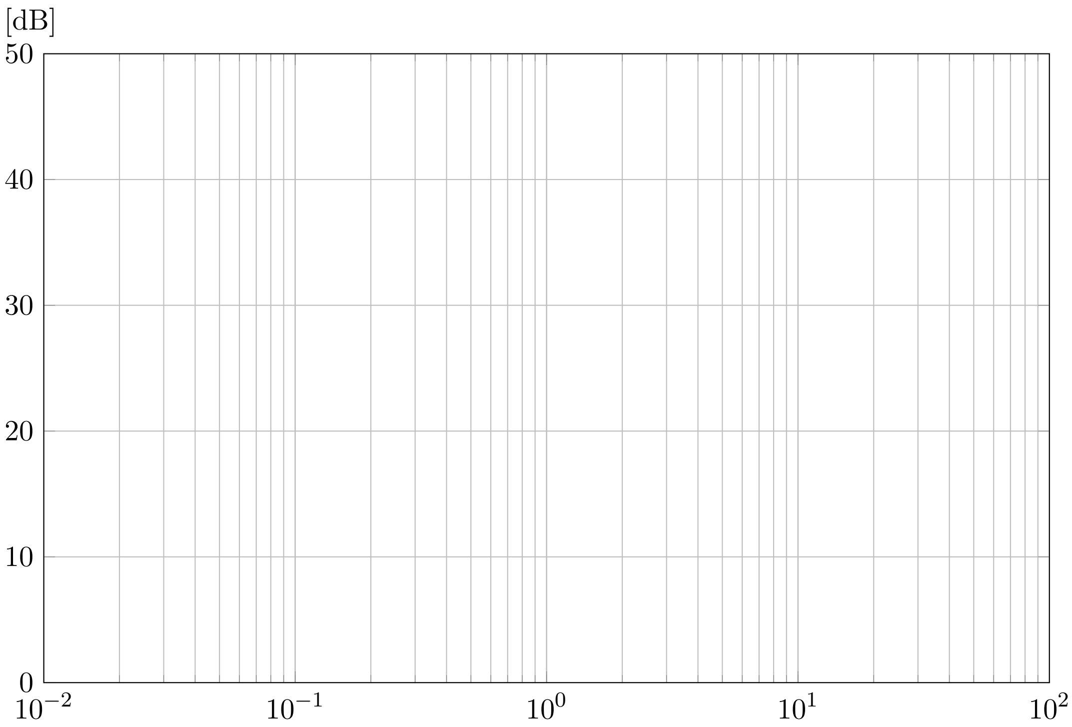
Bestimmen Sie die zum Zeichnen notwendigen Daten der Asymptoten sowie die Anfangswinkel in den konjugiert komplexen Polen. Zeichnen Sie dann die Asymptoten sowie die Tangenten in den konjugiert komplexen Polen und skizzieren Sie die den Verlauf der Wurzelortskurve im gegebenen Diagramm. Kennzeichnen Sie durch einen Pfeil in jedem Kurvenstück die Richtung steigender Verstärkung.

4. Bestimmen Sie für den *Amplitudengang* der Übertragungsfunktion

$$G(S) = \frac{s+1}{\frac{1}{100}s^2 + \frac{1}{200}s + 1}$$

- die zum Zeichnen notwendigen Daten der Asymptoten
- und die Werte (in dB) an den Eckfrequenzen.

Tragen Sie die die Asymptoten und die Punkte des Amplitudengangs an den Eckfrequenzen in das leere Diagramm ein und skizzieren Sie den Amplitudengang.



Kreative Anwendung

5. Markieren Sie im Bode-Diagramm eines Phasenminimumsystems folgende Größen und geben Sie die abgelesenen Werte hier an:

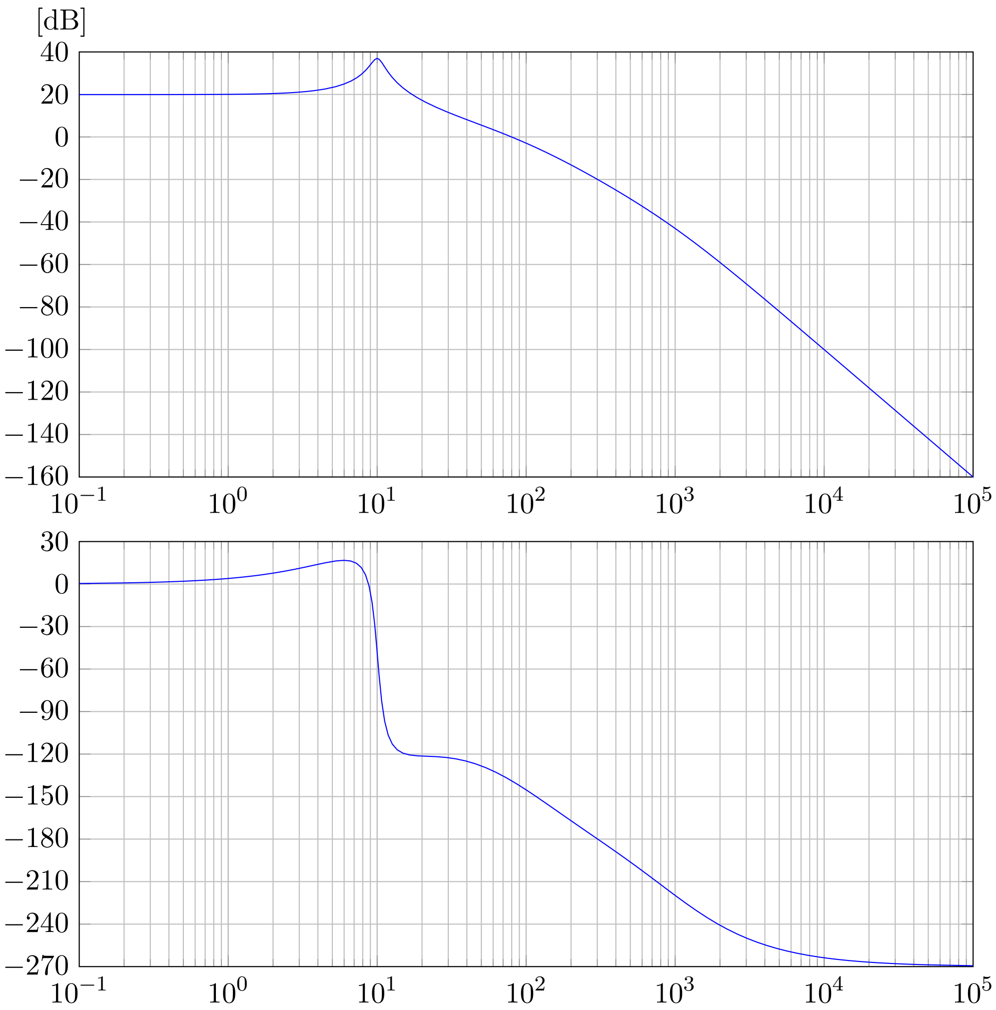
Phasenschnittkreisfrequenz	$\omega_\pi =$
Durchtrittskreisfrequenz	$\omega_c =$
Betragsreserve	$G_m =$
Phasenreserve	$\varphi_m =$

Hat das System Nullstellen? Begründung angeben!

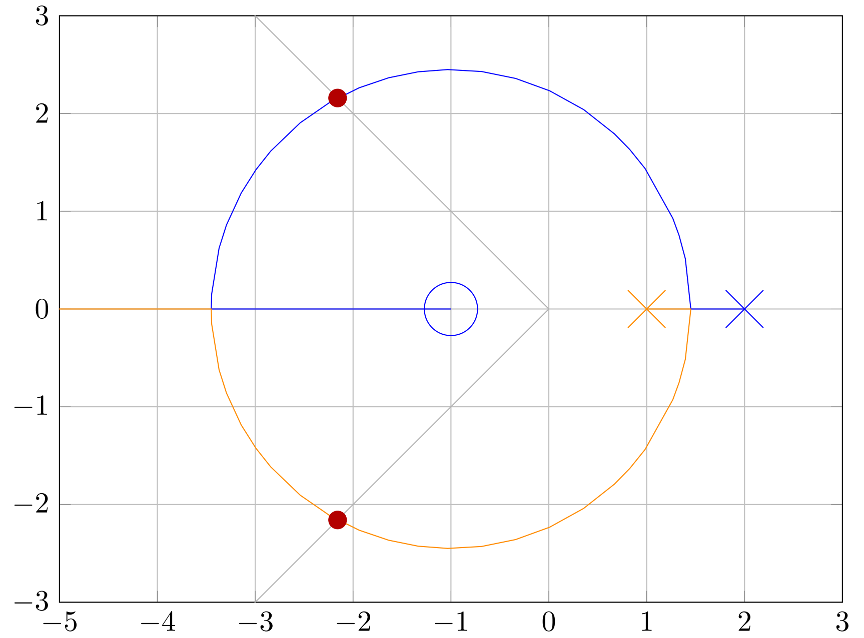
☐ ja

☐ nein

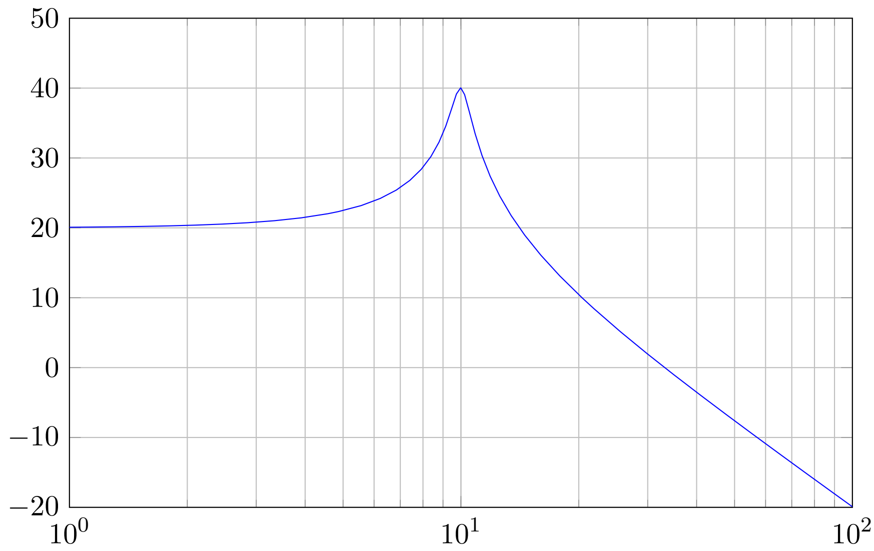
Begründung:



6. Berechnen Sie für für folgende Wurzelortskurve die Verstärkung K des Reglers, für die die Pole des geschlossenen Regelkreises auf den Winkelhalbierenden in der linken Halbebene liegen.



7. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Phasenminimumsystem zweiter Ordnung ohne Nullstelle mit folgendem Amplitudengang:



8. Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10}{s^3 + 11\,s^2 + 11\,s + 10}$$

Berechnen Sie die Betragsreserve im Frequenzgang $G(\mathrm{i}\omega)$.

Lösungen

1. - Freischneiden
   - $m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = cr + b\dot{r}$
   - $\dfrac{X(s)}{R(s)} = \dfrac{c + bs}{ms^2 + bs + c}$
2. - Pole: $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = -2$, $\Rightarrow$ WOK auf reellen Achse: links von ungerader Anzahl von Polen $\Rightarrow 0 > s > -1$ und $-2 > s$
   - Ansatz + Rechnung Verzweigungspunkt

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = 0$$

$$\begin{aligned}
&(s+1)(s+2) + s(s+1) + s(s+2) = 0 \\
&\Rightarrow 3s^2 + 6s + 2 = 0 \\
&\Rightarrow s_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{12}}{6} \\
&s_1 = -0.423 \quad s_2 = -1.577
\end{aligned}$$

   - Muss auf WOK liegen, d.h. obige Bedingung erfüllen: $\Rightarrow s = -0.423$
3. - Daten: $p_1 = -4 + 0\mathrm{i}$, $p_2 = -1 + 0\mathrm{i}$, $p_{3,4} = -2 \pm \mathrm{i}$, $n = 4$, $m = 0$, Vielfachheit im Polpaar $p_{3,4}$: $q = 1$
   -

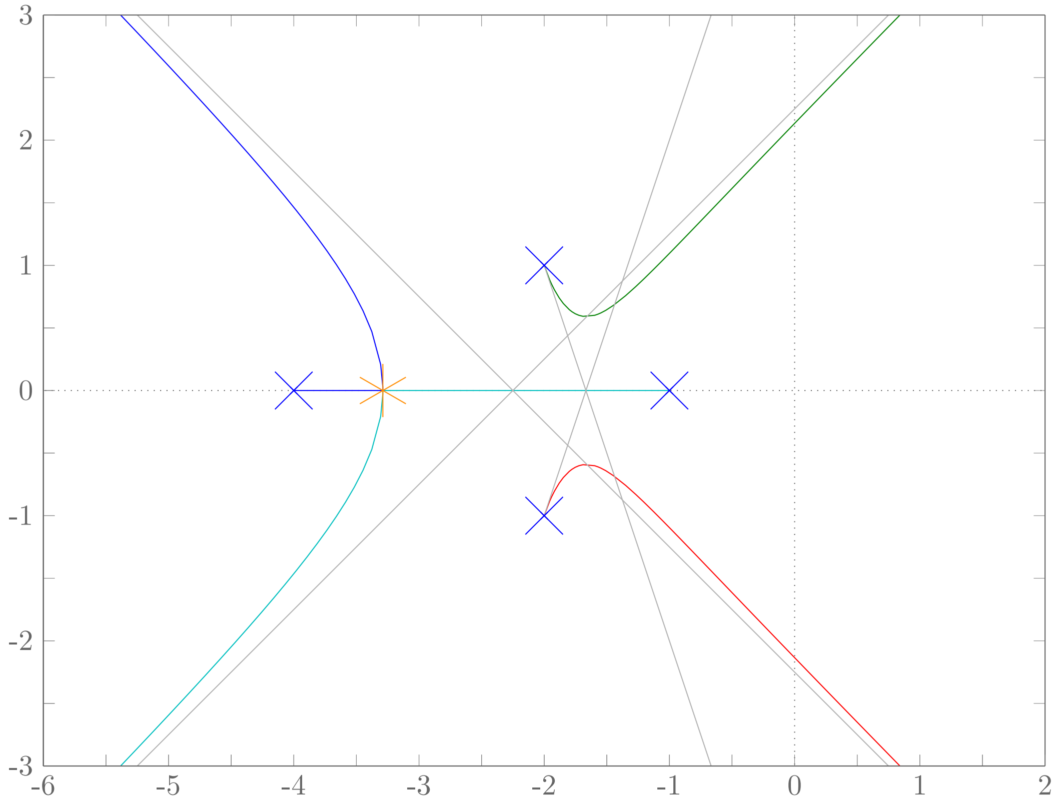
$$\begin{aligned}
&\text{Polschwerpunkt: } \alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m} \Rightarrow \alpha = -2.25 \\
&\text{Asymptoten-Winkel: } \varphi_l = \frac{\pi + 2\pi(l-1)}{n-m} \\
&\Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4} \qquad \varphi_2 = \frac{3}{4}\pi \qquad \varphi_3 = \frac{5}{4}\pi \qquad \varphi_4 = \frac{7}{4}\pi \\
&\text{Anfangswinkel: } \varphi_{l,\mathrm{beg}} = \frac{1}{q}\left(\sum \psi_i - \sum_{i \neq l} \varphi_i - \pi - 2\pi(l-1)\right)
\end{aligned}$$

   Berechnung Anfangswinkel $\varphi_{1,\mathrm{beg}}$ im Pol p_3:

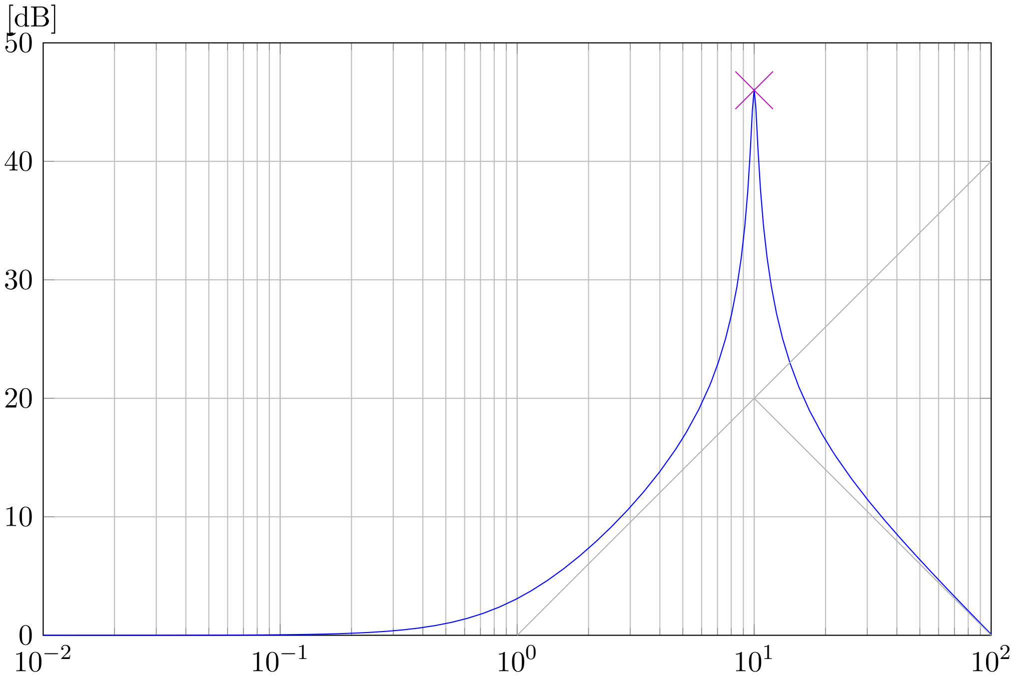
$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = \angle(p_3 - p_1) = \arctan 0.5 \approx 26.6^\circ \\
&\varphi_2 = \angle(p_3 - p_2) = 135^\circ \\
&\varphi_3 = \angle(p_3 - p_4) = 90^\circ \\
&\Rightarrow \varphi_{1,\mathrm{beg}} = -431.6^\circ = -71.6^\circ
\end{aligned}$$

   $\Rightarrow$ Anfangswinkel im Pol p_4: 71.6°

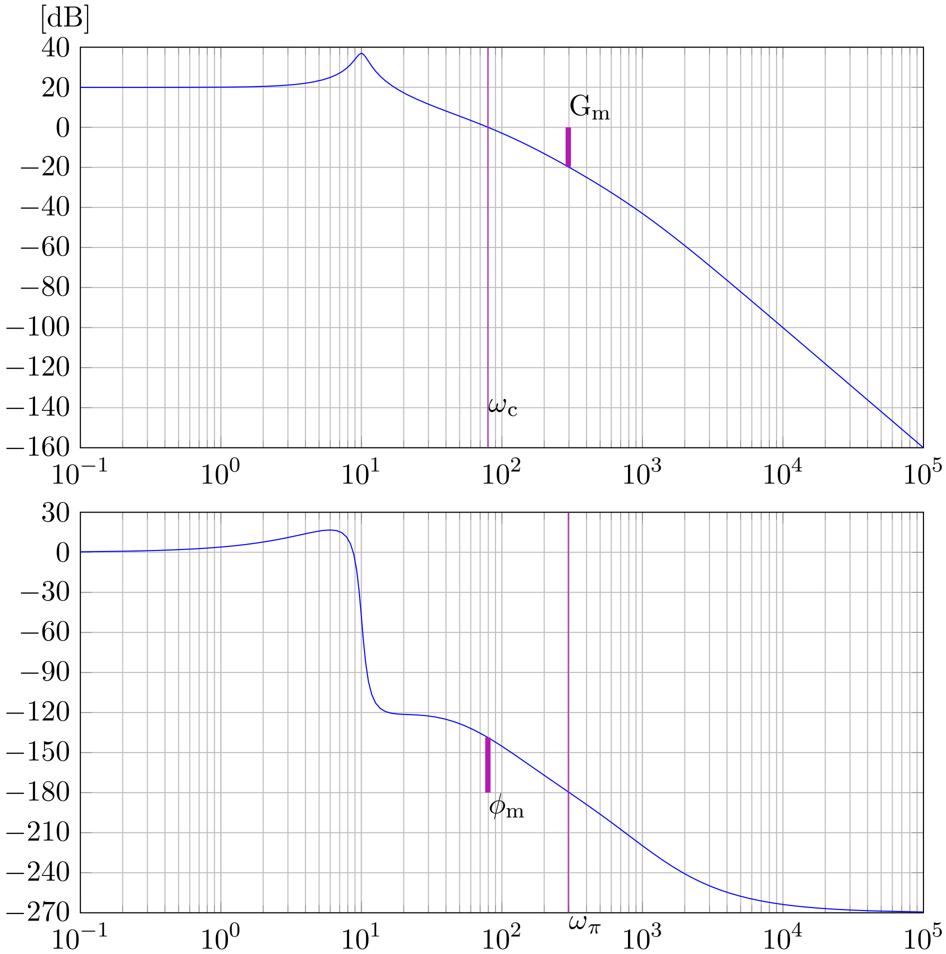
- Asymptoten korrekt, WOK ungefähr richtig



4.
- $G(s) = 1 \cdot (s+1)(\frac{1}{10^2}s^2 + \frac{1}{200}s + 1)^{-1} \Rightarrow \log K = \log 1 = 0,$
  - PD$_1$-Glied: $\omega_{\mathrm{E}} = 1/T = 1$, Steigung 20 dB/Dekade,
  - PT$_2$-Glied: $\omega_{\mathrm{E}} = 1/T_2 = 10$, Steigung -40 dB/Dekade
- $20 \log K = 0$
  - PD$_1$-glied: $20 \log A(\omega_{\mathrm{E}} = 1) \approx 3\,\mathrm{dB} = 3\,\mathrm{dB}$
  - PT$_2$-Glied: PD$_1$-Asymptotenwert $= 20\,\mathrm{dB}$ bei $\omega = 10$ $\Rightarrow 20 \log A(\omega_{\mathrm{e}} = 10) \approx 20\,\mathrm{dB} + 20 \log(T_2/T_1) = 46\,\mathrm{dB}$
-



5.
- $\omega_\pi = 300\,\mathrm{Hz}$, $\omega_\mathrm{c} = 80\,\mathrm{Hz}$, $G_\mathrm{m} = 20\,\mathrm{dB}$, $\varphi_\mathrm{m} = 40°$
-



- JA: Das System hat Nullstellen, weil bei einem Phasenminimumsystem der Phasengang dann und nur dann eine positive Steigung haben kann, wenn mindestens eine Nullstelle vorhanden ist.

6. - Pole: $p_1 = 1, p_2 = 2$, Nullstellen: $z = -1$, $\Rightarrow G(s) = \dfrac{s+1}{(s-1)(s-2)}$
   - WOK char. Gleichung: $s^2 - 3s + 2 + K(s+1) = 0$, s auf Winkelhalbierenden: $s_{1,2} = a \pm \mathrm{i}a$, mit $a < 0$, s_1 einsetzen:

- $$\begin{aligned}
&(a+\mathrm{i}a)^2 - 3(a+\mathrm{i}a) + 2 + K(a+\mathrm{i}a+1) = 0\\
&a^2 - a^2 + 2\mathrm{i}a^2 - 3a - 3\mathrm{i}a + 2 + Ka + \mathrm{i}aK + K = 0\\
&\underbrace{(-3a+2+Ka+K)}_{=0} + \mathrm{i}\underbrace{(2a^2-3a+aK)}_{=0} = 0 \Rightarrow 2a^2 - 3a + aK = 0\\
&\Rightarrow 2a - 3 + K = 0\\
&\Rightarrow K = 3 - 2a\\
&\Rightarrow -3a + 2 + (3-2a)a + (3-2a) = 0\\
&\Rightarrow -3a + 2 + 3a - 2a^2 + 3 - 2a = 0 \Rightarrow 2a^2 + 2a - 5 = 0\\
&\Rightarrow a = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{44}{16}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}\\
&a < 0 \Rightarrow a = -2.1583\\
&\Rightarrow K = 7.3166
\end{aligned}$$

7.
- PT_2-Glied wegen Überhöhung, Aus Anfangsasymptotoe folgt $K = 20\,\mathrm{dB} = 10$
- $\omega_\mathrm{E} = 10\,\mathrm{Hz} = \frac{1}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{1}{10}$,
- Überhöhung $20\,\mathrm{dB} = 10 = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{1}{100}$

  $\Rightarrow G(s) = \dfrac{K}{\frac{1}{T_2^2}s^2 + \frac{1}{T_1}s + 1} = \dfrac{10}{\frac{1}{100}s^2 + \frac{1}{100}s + 1}$

8.
- $$\begin{aligned}
&G_m = \frac{1}{|G(\mathrm{i}\omega_\pi)|}\\
&G(\mathrm{i}\omega) = \frac{10}{(-11\omega^2 + 10) + \mathrm{i}\omega(11 - \omega^2)}
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
&\tan(-\pi) = 0 = -\frac{\omega_\pi(11-\omega_\pi^2)}{-11\omega_\pi^2 + 10}\\
&\Rightarrow \omega_\pi = \sqrt{11}
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
&G(\mathrm{i}\omega_\pi) = \frac{10}{-111}\\
&\Rightarrow G_m = 11.1 = 20.91\,\mathrm{dB}
\end{aligned}$$