7 Signifikanztests Teil 1

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 30. April 2015, 12:50

Die nummerierten Felder bitte während der Vorlesung ausfüllen.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

- Prüfe Hypothese über Verteilung(en) der Grundgesamtheit(in), zum Beispiel
  - „Ein Würfel ist fair“
  - „Die Brenndauern zweier Glühbirnensorten sind gleich“

- Überprüfung anhand von Stichprobe(n)
- Prinzip:
  - Verwerfung bei [1] zur Stichprobe
  - Ansonsten: Hypothese [2]
- Eine verworfene Hypothese gilt als [3]

  Beibehaltung $\widehat{=}$ [4]

$\Rightarrow$ Beibehaltung ist [5] der Hypothese

- Trick: [6]

2 Einführung/Einstichproben-Gaußtest ([Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.1])

- Voraussetzungen:
  - [7]
  - Einfache Stichprobe [8]
  - (Null-)Hypothese [9]
- Beispiel: $X_1, \ldots, X_{25}$ mit $X_i =$ Füllmenge der i-ten Flasche $\sim N(\mu, 1.5)$

  Nullhypothese: [10]

- Je nach Interessenlage sind unterschiedliche *Gegenhypothesen* möglich:

  a) [11]

12

b)

13

c)

- Wirksamster erwartungstreuer Schätzer für μ: 14

$\Rightarrow$ Entscheidung:

$H_0 : \mu = \mu_0$ wird abgelehnt gegenüber

15

a)

16

b)

17

c)

- Alternatives Kriterium (statt 18):

19

- Vorteil: Verteilung bekannt, falls $\mu = \mu_0$, das heißt H_0 wahr:

20

$\Rightarrow$ Dann: $H_0 : \mu = \mu_0$ wird abgelehnt gegenüber

21

a)

22

b)

23

c)

- Mögliche Fehlentscheidungen (siehe auch [Pap11, Teil III, Kapitel 4.4, Seite 550]):
  - Ablehnung von H_0, obwohl H_0 richtig ist: 24
  - Nicht-Ablehnung von H_0, obwohl H_0 falsch ist: 25
- Maximal erlaubte Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art:

26

- Mit 27 lässt sich festlegen, was „sehr groß" usw. heißt:
- Fehler 1. Art im Fall a):

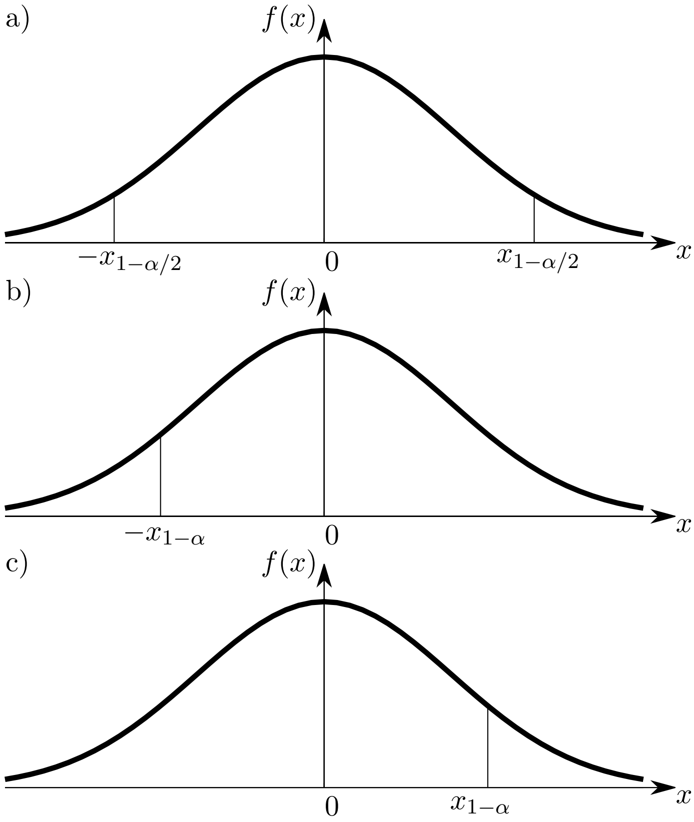
28

- Wahrscheinlichkeit dafür:

29

$\Rightarrow$ Verwerfung $\Leftrightarrow$ 30

- Verwerfungsbereich: 31
- Analoge Vorgehensweise für die Fälle b) und c)



- Insgesamt: Verwerfung $\Leftrightarrow$ [32] , wobei

[33]

- Vorgehensweise:

Schritt 1: Ein Signifikanzniveau [34] wird festgelegt.

Schritt 2: Der Testfunktionswert [35] wird errechnet.

Schritt 3: Der Verwerfungsbereich

36

wird festgelegt, wobei $x_{1-\alpha/2}$ und $x_{1-\alpha}$ das $(1-\dfrac{\alpha}{2})$ und das $(1-\alpha)$Fraktil der 37 Verteilung ist.

Schritt 4: H_0 wird genau dann verworfen, wenn 38 gilt.

- Beispiel von oben: $X_1, \ldots, X_{25}$ mit $X_i = X_i \sim N(\mu, 1.5)$ und $\bar{x} = 499.28$

  Prüfe $H_0 : \mu = 500$, 39 zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$

  Fall: 40

  1. 41
  2. 42
  3. 43
  4. 44

  Interpretation: Zum Signifikanzniveau 1 % kann der Brauerei 45 vom Sollwert $\mu_0 = 500$ nachgewiesen werden.

- Entscheidung ebenfalls mithilfe von Schätzintervall möglich:

  Berechne, wenn α das Signifikanzniveau ist, ein symmetrisches Schätzintervall 46 für ϑ zum Konfidenzniveau 47 und lehne

48

genau dann ab, wenn 49

Hier: Intervall für μ:

1. 50
2. 51
3. 52
4. 53
5. 54

55

3 Aufbau von Signifikanztests

- 1. Ein 56 , das die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der es zu einer fälschlichen Ablehnung von H_0 kommen darf,
  2. eine Stichprobenfunktion (= Testfunktion) 57
  3. einen Verwerfungsbereich 58 ,
  4. die Entscheidungsregel: lehne H_0 genau dann ab, wenn die Realisierung 59 der Testfunktion 60 im Verwerfungsbereich 61 liegt.
- Statistik-Software:

- verlangt *keine* Vorgabe des Signifikanzniveaus α
- Stattdessen: Ausgabe des 62
- 63 ist das kleinste Signifikanzniveau, zu dem H_0 abgelehnt werden würde (bei dieser Stichprobe)
- Entscheidungsregel:

64

4 Klassifikation

1. Signifikanztests bei einer einfachen Stichprobe
   - Eine Stichprobe, ein Merkmal
   - Beispiel: „Ist die erwartete Füllmenge gleich 500 ml"
   - In der Vorlesung behandelte Tests bei einer einfachen Stichprobe:
     - 65
       * Einstichproben-Gaußtest, σ 66 (Kapitel 2 und [Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.1])
       * Einstichproben-t-Test und approximativer Gaußtest, σ 67 (Kapitel 5 und [Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.2, 4.5.5])
     - 68 ([Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.4])
     - 69 ([Pap11, Teil III, Kapitel 5.3])
2. Signifikanztests bei unabhängigen Stichproben
   - Mehrere (zwei) disjunkte Stichproben, ein Merkmal
   - Beispiel: „Hängt die Abiturnote vom Beruf des Vaters ab?"

- In der Vorlesung behandelte Tests bei unabhängigen Stichproben ([Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.3.3]):
  - Zweistichproben-Gaußtest, σ^2 70
  - Zweistichproben-t-Test und approximativer Gaußtest, σ^2 71

3. Signifikanztests bei verbundenen Stichproben
   - Eine Stichprobe, zwei Merkmale
   - Beispiel: „Besteht ein Zusammenhang zwischen Alter und Einkommen?“
   - In der Vorlesung behandelte Tests bei verbundenen Stichproben ([Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.3.2]):

     72

5 Einstichproben-t-Test und approximativer Gaußtest ([Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.2 und 4.5.5]))

- Gegeben:
  - Einfache Stichprobe 73 mit
  - 74
- Einstichprobentests:

  75
- Voraussetzungen

  1. 76

(Einstichproben-t-Test)

oder

2. Beliebige Verteilung mit

77

(approximativer Gaußtest)

- Vorgehensweise:

Schritt 1: Ein Signifikanzniveau 78 wird festgelegt.

Schritt 2: Der Testfunktionswert v wird errechnet, nämlich gemäß:

79

Schritt 3: Der Verwerfungsbereich

80

wird festgelegt, wobei die Fraktilswerte $x_{1-\alpha/2}$ oder $x_{1-\alpha}$

– der 81 -Verteilung unter Voraussetzung 1. bei 82 ,

– der 83 -Verteilung unter Voraussetzung 2. oder unter Voraussetzung 1. bei 84

zu entnehmen sind.

Schritt 4: H_0 wird genau dann verworfen, wenn 85 gilt.

- Beispiel: $X_1, \ldots, X_{2000} \sim B(1,p)$ mit

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i\text{-te Person Wähler der Partei ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{2000} x_i = 108$$

Prüfe $H_0 : p \leq 0.05$, $H_1 :$ 86 zum Signifikanzniveau 2 %

Fall: 87

Voraussetzung 88

1. 89

2. 90

3. 91

4. 92

6 Übungsaufgaben

[Pap11, Teil III, Zu Abschnitt 4, Aufgaben 1-5, Seite 644f]

Literatur

[Pap11] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 6. Auflage. Bd. 3. Vieweg + Teubner, 2011.