

# 6 Übungen zur Intervallschätzung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 20. Mai 2015, 10:54



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

## Aufgabe 1: Reviewfragen

- Wozu dient die Intervallschätzung?
- Wie hängen Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  und das Konfidenzniveau zusammen?
- Warum wird das  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Fraktile und *nicht* das  $(1 - \alpha)$ -Fraktile bestimmt, wenn das Konfidenzintervall für  $\mu$  bei Normalverteilung geschätzt werden soll?
- Was bedeutet hier *dichotom*?
- Was ist die Voraussetzung, wenn das Konfidenzintervall für  $\mu$  bei beliebiger / dichotomer Verteilung geschätzt werden soll?
- Falls die Verteilung beliebig, nicht dichotom und die Standardabweichung  $\sigma$  unbekannt ist, in welchen Fällen kann eine andere Schätzfunktion als die Stichproben-Standardabweichung  $S$  für  $\hat{\sigma}$  sinnvoll sein?

## Aufgabe 2:

Eine Stichprobe  $(x_1, \dots, x_{30})$  vom Umfang  $n = 30$  aus einer normalverteilten Grundgesamtheit ergibt

$$\bar{x} = 1\,500 \quad \text{und} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 20\,000$$

- In welchem Intervall liegt „mit 95 %-iger Sicherheit“ der Erwartungswert  $\mu$ ?
- Zu welchem Konfidenzniveau entsteht ein Schätzintervall für  $\mu$  der Form  $[1\,460 \quad 1\,540]$ ?
- Bestimmen Sie das Schätzintervall für die Varianz zum Konfidenzniveau 0.95

*Hinweis: Nutzen Sie die Tabellen der entsprechenden Verteilungen im Skript und interpolieren Sie gegebenenfalls.*

**Aufgabe 3:**

Bei 120 Würfeln mit einem Würfel erschienen die Zahlen 1 bis 6 mit folgenden Häufigkeiten:

Zahl $a$	1	2	3	4	5	6
$h(a)$	21	27	20	24	15	13

Bestimmen Sie zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha = 0.95$  ein Schätzintervall für den Erwartungswert der Augenzahl.

**Aufgabe 4:**

Die Füllmenge von Limonadeflaschen wurde geprüft und es ergaben sich folgende Werte:

ccm	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207
Anzahl	2	1	3	1	3	1	2	1	1	0	1

Nach Angaben des Abfüllers ist die Füllmenge normalverteilt mit einer Varianz von  $\sigma^2 = 2.25$ . Geben Sie ein Schätzintervall für den Erwartungswert  $\mu$  zum Niveau  $1 - \alpha = 0.94$  an und bestimmen Sie die Intervalllänge. Welcher Stichprobenumfang garantiert eine Länge von 1 für das Schätzintervall?

**Aufgabe 5:**

$X_1, \dots, X_{31}$  beschreibe eine einfache Stichprobe aus einer beliebig verteilten Grundgesamtheit. Aus den Ergebnissen wurden  $\bar{x} = 9$  und  $s^2 = \frac{31}{4}$  errechnet. Bestimmen Sie zur Irrtumswahrscheinlichkeit 0.05

- ein Schätzintervall für den Erwartungswert
- ein Schätzintervall für die Varianz  $\sigma^2$ , unter der Annahme, dass die  $X_i$  normalverteilt sind,

**Aufgabe 6:**

In einer Fabrik wird der tägliche Stromverbrauch  $X$  bei konstanter Auslastung von Maschinen untersucht. Bei 200 gleichartigen Maschinen ergab sich die Stichprobenrealisation  $x_1, \dots, x_{200}$ , von der bekannt ist:

$$\sum_{i=1}^{200} x_i = 2400 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{200} x_i^2 = 30929$$

- Bestimmen Sie das Schätzintervall für den Verbrauch  $\mu$  mit einem Konfidenzniveau von 95 %.
- Es sei gesichert, dass für die Standardabweichung  $\sigma$  von  $X$  sowie alle denkbaren Realisationen der Stichproben-Standardabweichung höchstens 4 betragen. Ab welchem Stichprobenumfang  $n$  ist gesichert, dass die Länge des Schätzintervalls zum Konfidenzniveau 99 % höchstens 0.9 beträgt?

**Aufgabe 7:**

Bislang musste an Postschaltern im Mittel 3 Minuten gewartet werden. Eine für alle Postfilialen erwogene Software-Unterstützung wird vor der generellen Installation per Stichprobe untersucht. Bei 200 Kunden ergaben sich die Dauern  $x_1, \dots, x_{200}$  mit  $\bar{x} = 2.5$  und  $s = 2.15$ .

- Bestimmen Sie zu einem Konfidenzniveau von 95 % ein Schätzintervall für die erwartete Dauer nach Installation.
- Wie groß muss das Konfidenzniveau gewählt werden, damit die obere Grenze des Schätzintervalls gerade 3 beträgt?

**Aufgabe 8:**

Aus der Grundgesamtheit der Studenten wurden 100 zufällig (mit Zurücklegen) ausgewählt und befragt, ob sie rauchen. Dabei antworteten 36 mit *ja* und 64 mit *nein*.

- Bestimmen sie das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 95 % für den Anteil der Raucher in der vorliegenden Grundgesamtheit.
- Welcher Stichprobenumfang würde bei gleichem Konfidenzniveau von 95 % gewährleisten, dass die Länge des Konfidenzintervalls 0.14 ist?

**Aufgabe 9:**

Ein Anbieter von Online-Computerspielen hat bei 100 zufällig ausgewählten Nutzern eine Woche lang protokolliert, wie lange sie spielten. Aus den in Minuten gemessenen Spieldauern  $x_1, \dots, x_{100}$ , die als Realisierungen normalverteilter Stichprobenvariablen angesehen werden können, wurden die Werte

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 21840 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 4868856$$

errechnet.

- Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 95 % für die Varianz der gemessenen Spieldauer.
- Was ergibt sich bei einer Punktschätzung mit einer *erwartungstreuen* Schätzfunktion für die Varianz?

**Aufgabe 10:**

Gegeben ist eine einfache Stichprobe vom Umfang 40 aus einer Grundgesamtheit mit unbekannter Varianz. Aus dieser Stichprobe wurde für den Erwartungswert der Grundgesamtheit mit  $\alpha = 0.05$  das symmetrische Konfidenzintervall  $[297.03 \quad 352.97]$  ermittelt.

- Unterstellen Sie, dass die Grundgesamtheit Poisson-verteilt ist. Bestimmen Sie dann einen geeigneten Schätzwert des Verteilungsparameters der Poisson-Verteilung.

Nehmen Sie im Folgenden an, obiges Schätzintervall sei mit Daten aus einer normalverteilten Grundgesamtheit errechnet worden.

2. Geben Sie den *Maximum-Likelihood-Schätzwert* für die Standardabweichung an.
3. Bestimmen Sie zur Irrtumswahrscheinlichkeit 10 % ein Schätzintervall für die Varianz.

### Aufgabe 11:

Eine Alkoholkontrolle bei Autofahrern lieferte 34 fahruntaugliche Fahrer mit folgenden Werten:

Blutalkohol ‰	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
Anzahl	11	9	6	4	2	2

Bestimmen Sie für ein Konfidenzniveau von 95 % das symmetrische Schätzintervall für den Erwartungswert des Blutalkoholgehalts eines fahruntauglichen Autofahrers.

### Aufgabe 12:

Hans, Hobby-Statistiker, hat auf Basis der selben einfachen Stichprobe aus einer  $B(1, p)$ -verteilten Grundgesamtheit die folgenden beiden Schätzintervalle für den unbekanntem Verteilungsparameter  $p$  bestimmt:

$$I_1 = [0.1342 \quad 0.2658] \quad \text{und} \quad I_2 = [0.1216 \quad 0.2784]$$

Das Intervall  $I_2$  hat Hans zum Konfidenzniveau 95 % berechnet.

- (a) Zeigen Sie, dass  $I_1$  und  $I_2$  eine Stichprobe vom Umfang 100 zu Grunde liegt.
- (b) Mit welchem Konfidenzniveau hat Hans das Schätzintervall  $I_1$  bestimmt?
- (c) Wie groß hätte Hans den Stichprobenumfang wählen müssen, so dass die Länge des 95 %-Konfidenzintervalls maximal die Länge von  $I_1$  erreicht?
- (d) Was ist der Maximum-Likelihood-Schätzwert des Erwartungswerts der Grundgesamtheit?