

6 Intervallschätzung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 20. April 2015, 15:37

Die nummerierten Felder bitte während der Vorlesung ausfüllen.



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Intervallschätzung für den unbekannt Parameter μ	3
2.1	Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung mit σ^2 bekannt	3
2.2	Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung mit σ^2 unbekannt	4
2.3	Konfidenzintervall für μ bei beliebiger/dichotomer Verteilung	5
3	Konfidenzintervall für σ^2 bei Normalverteilung	8
4	Uebungsaufgaben	9
1	Einleitung	

- Schätze ein Intervall für ϑ auf Basis einer Stichprobe.
- Verwendung der Stichprobenfunktionen θ_u, θ_o , so dass

1

⇒ *Konfidenzintervall* für μ zum *Konfidenzniveau* $1 - \alpha$

- Beachte:

Das *Schätzintervall* $[\hat{\mu} - \hat{\sigma} \cdot \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + \hat{\sigma} \cdot \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}]$ ist die Realisierung der Zufallsvariablen (!)

⇒ Irrtumswahrscheinlichkeit α

- Welche Konfidenzintervalle sind zur Schätzung geeignet?

⇒ Hängt von Verteilung von G und vom unbekanntem Parameter μ ab.

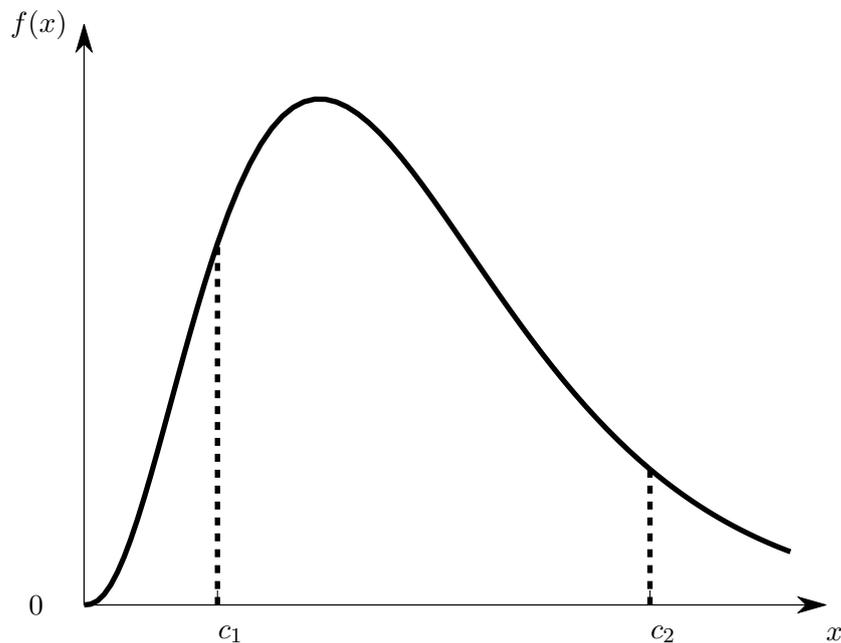
- Im Folgenden:

Einfache Stichprobe X_1, \dots, X_n mit $E(X_i) = \mu$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$

Symmetrische Konfidenzintervalle

Symmetrisch heißt: übereinstimmende *Wahrscheinlichkeiten* für Über- und Unterschreiten des Konfidenzintervalls, formal:

$$P(\hat{\mu} - \hat{\sigma} \cdot \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} < \mu < \hat{\mu} + \hat{\sigma} \cdot \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$



Wichtig: Eine Verkleinerung von α bewirkt eine Vergrößerung des Konfidenzintervalls.

2 Intervallschätzung für den unbekannt Parameter μ

2.1 Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung mit σ^2 bekannt [Pap11, Kapitel 3.4.2]

- Vorgehensweise:

Schritt 1: Lege ein Konfidenzniveau α fest.

Schritt 2: Bestimme das $\frac{\alpha}{2}$ -Fraktile c der $N(0, 1)$ -Verteilung.

Schritt 3: Berechne das Stichprobenmittel \bar{x} .

Schritt 4: Berechne den Wert $\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}$.

Schritt 5: Gebe als Schätzergebnis das Intervall $[\bar{x} - \frac{\sigma c}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{\sigma c}{\sqrt{n}}]$.

- Grund für $N(0, 1)$ -Verteilung: Betrachte zum Beispiel $\theta_u = \bar{X} - \frac{\sigma c}{\sqrt{n}}$:

16 |

- Beispiel: Normalverteilung mit $\sigma = 2.4$,
 $(x_1, \dots, x_9) = (184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2, 183.9, 185.0, 187.1, 184.4)$
 Gesucht: Intervall für μ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.99$

17 |

1. |

18 |

2. |

19 |

3. |

20 _____
 4. |
 21 _____
 5. |

- Wichtige $N(0, 1)$ -Fraktilewerte: siehe [Pap11, Tabelle 2, Seite 742]
- Intervalllänge

– Im Fall 2.1 gilt offenkundig

22 _____
 |

– Welches n sichert eine vorgegebene (Maximal-)Länge L ? Lücke 22 nach n auflösen!

23 _____
 \Rightarrow |

– Obiges Beispiel: $L = 4 \Rightarrow$

24 _____
 |

– Eine Halbierung von L erfordert eine Vervierfachung von n !

2.2 Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung mit σ^2 unbekannt [Pap11, Kapitel 3.4.3]

- Vorgehensweise:

Schritt 1: Lege ein Konfidenzniveau $\overset{25}{\quad}$ fest.

Schritt 2: Bestimme das $\overset{26}{\quad}$ -Fraktile c der $\overset{27}{\quad}$ -Verteilung.

Schritt 3: Berechne das Stichprobenmittel $\overset{28}{\quad}$ und die Stichproben-Standardabweichung

29 _____
 |

Schritt 4: Berechne den Wert $\frac{30}{\quad}$.

Schritt 5: Gebe als Schätzergebnis das Intervall $\frac{31}{\quad}$

- Zu Schritt 2:

Falls $\frac{32}{\quad}$ \Rightarrow $\frac{33}{\quad}$ -Verteilung kann verwendet werden.

- Beispiel von oben:

1. $\frac{34}{\quad}$

2. $\frac{35}{\quad}$

3. $\frac{36}{\quad}$

4. $\frac{37}{\quad}$

5. $\frac{38}{\quad}$

2.3 Konfidenzintervall für μ bei beliebiger/dichotomer Verteilung [Pap11, Kapitel 3.4.6]

- Voraussetzung:

$\frac{39}{\quad}$

- Vorgehensweise:

Schritt 1: Lege ein Konfidenzniveau $\frac{40}{\quad}$ fest.

Schritt 2: Bestimme das ⁴¹ _____ -Fraktile c der ⁴² _____ -Verteilung.

Schritt 3: Berechne das Stichprobenmittel ⁴³ _____ und einen Schätzwert $\hat{\sigma}$ für σ ; setze

⁴⁴ _____

Schritt 4: Berechne den Wert ⁴⁵ _____ .

Schritt 5: Gebe als Schätzergebnis das Intervall ⁴⁶ _____

- Zu Schritt 3:

Bei manchen bekannten Verteilungen kann ein anderer Schätzer ⁴⁷ _____ sinnvoller sein.

Zum Beispiel: Poisson-Verteilung mit ⁴⁸ _____ unbekannt.

$$(x_1, x_2, \dots, x_{40}) = (3, 8, \dots, 6) \quad \text{mit } \bar{x} = 6.5$$

Gesucht: Intervall für ⁴⁹ _____ zum Konfidenzniveau ⁵⁰ _____

⁵¹ _____

1. | _____

⁵² _____

2. | _____

⁵³ _____

3. | _____

54 _____
 |
 4.

55 _____
 |
 5.

• Intervalllänge

– Falls $\left| \begin{array}{l} \text{56} \\ \text{_____} \end{array} \right.$ bekannt \Rightarrow Lücke 23 verwenden

– Sonst hängt $L = \frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}$ wegen $\left| \begin{array}{l} \text{57} \\ \text{_____} \end{array} \right.$ vom Stichprobenergebnis ab
 $\Rightarrow n$ kann im Allgemeinen *nicht* ermittelt werden.

– Ausnahme: Obere Schranke d für $\hat{\sigma}$ ist bekannt.

– Dann

58 _____
 |

– Beispiel: $G \sim B(1, p) \Rightarrow \bar{x} = \left| \begin{array}{l} \text{59} \\ \text{_____} \end{array} \right.$

60 _____
 |

3 Konfidenzintervall für σ^2 bei Normalverteilung [Pap11, Kapitel 3.4.4]

Als *Schätzfunktion* für σ^2 verwenden wir S^2 und bilden mit ihr die Stichprobenfunktion / Zufallsvariable

61

die einer χ^2 -Verteilung genügt, siehe Skript ④, Kapitel 5. Damit ergibt sich folgende Vorgehensweise:

- Falls μ unbekannt:

Schritt 1: Lege ein Konfidenzniveau $1 - \alpha$ fest.

Schritt 2: Bestimme c_1

der χ^2 -Verteilung.

Schritt 3: Berechne c_2

aus dem Stichprobenergebnis.

Schritt 4: Berechne die Werte c_1 und c_2

Schritt 5: Gebe als Schätzergebnis das Intervall $(c_1 S^2, c_2 S^2)$ an.

- Falls μ bekannt:

Schritt 2: Ersetze χ^2 durch F

Schritte 3 und 4: Ersetze

- Beispiel: $G \sim N(2, \sigma)$, $(x_1, \dots, x_5) = (1, 1.5, 2.5, 3, 2)$
 Gesucht: Intervall für σ^2 zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.99$

71

1.

72

2.

73

3.

74

4.

75

5.

4 Übungsaufgaben

Aufgabenblatt und [Pap11, Seite 642f: Zu Abschnitt 3 Aufgaben 4) bis 9)]

Literatur

[Pap11] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 6. Auflage. Bd. 3. Vieweg + Teubner, 2011.