5 Punktschätzung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 5. Februar 2015, 13:50

Die nummerierten Felder bitte während der Vorlesung ausfüllen.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

- Unbekannter Parameter [1] soll auf Basis einer Stichprobe geschätzt werden.
- Schätzwert: [2]

- Vorgehen: Verwendung einer *Schätzfunktion* 3

$\Rightarrow$ Schätzwert 4 ist Realisierung der Zufallsvariablen 5

Im Folgenden werden wir Kriterien kennenlernen, um Schätzfunktionen zu beurteilen und zu konstruieren. Wir gehen immer, falls nichts anderes gesagt wird, von einer einfachen Stichprobe aus, das heißt $X_1, \ldots, X_n$ sind i.i.d.

2 Grundbegriffe [Pap11, Teil III, Kapitel 3.2]

Erwartungstreue

- Eine Schätzfunktion

  6

  heißt *erwartungstreu* oder *unverzerrt* für ϑ, falls:

  7

- Falls nur gilt 8

  so heißt $\hat{\Theta}$ *asymptotisch erwartungstreu* für ϑ.
- **Beispiel** Wir untersuchen folgende Funktionen auf Erwartungstreue:

$$\hat{\Theta}_1 = \bar{X}, \quad \hat{\Theta}_2 = \frac{X_1 + X_n}{2}, \quad \hat{\Theta}_3 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

  1. 9
  2. 10

11

3.

Wirksamkeit

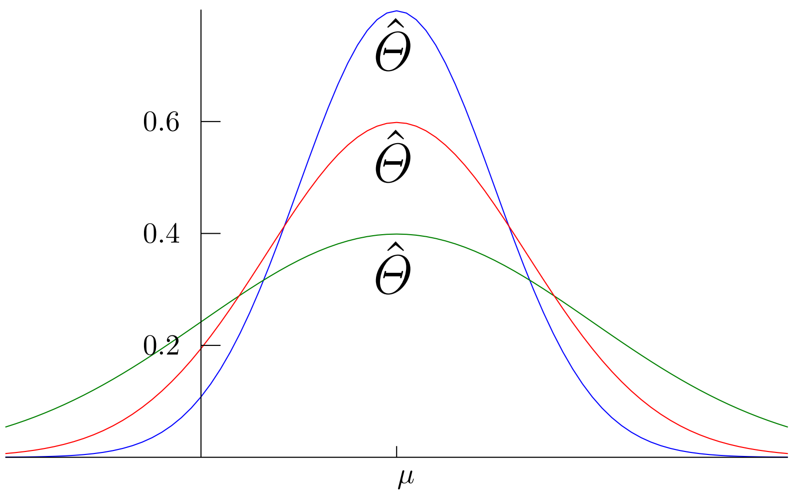
- Welche der erwartungstreuen Schätzfunktionen ist „besser“?
- Von zwei erwartungstreuen Schätzfunktionen $\hat{\Theta}_1$ und $\hat{\Theta}_2$ für ϑ heißt $\hat{\Theta}_1$ *wirksamer* als $\hat{\Theta}_2$, falls:

12

- **Beispiel:**

13

Erwartungstreue und Wirksamkeit



Verteilung von G	ϑ	wirksamste erwartungstreue Schätzfunktion
		14
unbekannt	μ	
$B(1,p)$	$p\ (=\mu)$	
$N(\mu,\sigma)$, σ bekannt / unbekannt	μ	
$N(\mu,\sigma)$, μ bekannt	σ^2	
$N(\mu,\sigma)$, μ unbekannt	σ^2	

Konsistente Schätzfunktionen

- Eine Folge von Schätzfunktionen $\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \ldots, \hat{\Theta}_n$ gemäß

  15

  heißt *konsistent* für ϑ, wenn für alle $c > 0$ gilt:

  16

  Das heißt, die Wahrscheinlichkeit, ϑ deutlich zu verfehlen, geht gegen 0.
- Mit der Tschebyscheff-Ungleichung

  $$P\big(|X - \mathrm{E}(X)| \geq c\big) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{c^2}$$

  ergibt sich die hinreichende Konsistenzbedingung:

  17

- Beispiel: Ist $\bar{X}_n$ konsistent für μ?

  18

3 Maximum-Likelihood-Prinzip [Pap11, Teil III, Kapitel 3.3]

Gegeben:

- Ergebnis einer einfachen Stichprobe 19
- Likelihoodfunktion 20

Beispiel:

- $G \sim B(1, p) \quad \Rightarrow \quad f_i(x_i) =$ 21
- p ist unbekannt
- Einfache Stichprobe mit $n = 2$

$\Rightarrow$ Likelihoodfunktion:

22

- Stichprobenergebnis $(0, 1) \Rightarrow$ 23

Gesucht:

Schätzwert $\hat{\vartheta}$, der „am besten zu $(x_1, \ldots, x_n)$ passt".

Maximum-Likelihood-Prinzip (ML-Prinzip):

- Wähle $\hat{\vartheta}$ so, dass für alle möglichen ϑ-Werte gilt:

  24

- Maximierung: 1. Ableitung zu Null setzen und 2. Ableitung < 0 prüfen.
- Maximierung für:
  - konkretes Stichprobenergebnis (zum Beispiel $(0, 1)$)

    25

- allgemeines Stichprobenergebnis (zum Beispiel (x_1, x_2))

26

- Maximierung der 27 Likelihoodfunktion liefert das selbe Ergebnis, ist aber oft einfacher:

28

Das ist möglich, weil 29 streng monoton mit x wächst.

Typische Vorgehensweise bei der ML-Schätzung

1. Likelihoodfunktion aufstellen: 30
2. gegebenenfalls 31
3. Erste Ableitung nullsetzen: 32
4. Vorzeichen der zweiten Ableitung prüfen: 33

Achtung: Lösung *meist* per Ableitung, es gibt aber Ausnahmen!

Beispiel Seite 5: $f(x_1, x_2|p) = p^{x_1+x_2}(1-p)^{2-x_1-x_2}$ bzw. $f(0, 1|p) = p - p^2$

- Konkreter Schätzwert:

34

- Schätzfunktion: Logarithmieren sinnvoll

- Logarithmieren:

35

- Ableiten und nullsetzen:

36

- 2. Ableitung prüfen:

37

Maximum-Likelihood-Schätzfunktionen

Verteilung von G	ϑ	ML-Schätzfunktion
$B(1,p)$	$p\ (=\mu)$	38
$Exp(\lambda)$	μ	
$Exp(\lambda)$	σ^2	
$P(\mu)$	μ	
$N(\mu,\sigma)$, σ bekannt / unbekannt	μ	
$N(\mu,\sigma)$, μ bekannt	σ^2	
$N(\mu,\sigma)$, μ unbekannt	σ^2	

Hilfreicher Satz für ML-Schätzung:

> Ist h eine *streng monotone* Funktion und ist $\hat{\Theta}$ eine Maximum-Likelihood-Schätzfunktion für den Parameter ϑ, so ist die Stichprobenfunktion $h(\hat{\Theta})$ eine Maximum-Likelihood-Schätzfunktion für den transformierten Parameter $h(\vartheta)$.

- Hinweis: h kann streng monoton wachsend oder fallend sein.
- Beispiele:
  - $\hat{\Theta}$ ML-Schätzfunktion für $\sigma^2 \Rightarrow$ 39 ML-Schätzfunktion für σ
  - Ist $G \sim Exp(\lambda)$, so ist $\frac{1}{\bar{X}}$ ML-Schätzfunktion für λ. Grund:

40

4 Übungsaufgaben

Aufgabenblatt und [Pap11, Seite 641f: Zu Abschnitt 2 alle Aufgaben, zu Abschnitt 3 Aufgaben 1),2),3)].

Literatur

[Pap11] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 6. Auflage. Bd. 3. Vieweg + Teubner, 2011.