

4 Übungen zu Grundlagen der induktiven Statistik

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 13. Mai 2015, 10:11



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Aufgabe 1: Reviewfragen

- (a) Was ist der Unterschied zwischen deskriptiver und induktiver Statistik?
- (b) Was versteht man unter einer *einfachen Stichprobe*?
- (c) Welchen Wert nimmt die Varianz des Stichprobenmittels $\text{Var}(\bar{X})$ für eine einfache Stichprobe X_1, \dots, X_n mit beliebiger Verteilung und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ an, wenn $n \rightarrow \infty$?
- (d) Was ist die Likelihoodfunktion $f(x_1, \dots, x_n | \vartheta)$?
- (e) Wie wird die Likelihoodfunktion $f(x_1, \dots, x_n | \vartheta)$ bei einer einfachen Stichprobe X_1, \dots, X_n bestimmt? Was bedeutet hier ϑ ? Geben Sie ein Beispiel für ϑ .
- (f) Unter welcher Voraussetzung für die einfache Stichprobe X_1, \dots, X_n gilt für ihre Stichprobenvarianz

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)?$$

Welchen Wert haben unter dieser Voraussetzung Erwartungswert und Varianz $E(T)$ und $\text{Var}(T)$ mit

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n}?$$

- (g) Wie hängen Erwartungswert der Stichproben-Standardabweichung $E(S)$ und die Standardabweichung σ zusammen?

Aufgabe 2: Likelihoodfunktion

Sie machen eine Blitzumfrage in Ihrem Umfeld, ob jemand raucht oder nicht. Sie bekommen folgende Antworten: *Raucher, Nichtraucher, Raucher, Nichtraucher, Nichtraucher*. Fassen Sie die Blitzumfrage als einfache Zufallsstichprobe „mit Zurücklegen“ auf. Bestimmen Sie die Likelihoodfunktion $f(R, \bar{R}, R, \bar{R}, \bar{R}|p)$, wobei p der Anteil der Raucher ist.

Aufgabe 3: Likelihoodfunktion

Gegeben sei eine einfache Stichprobe X_1, \dots, X_n mit

$$(a) X_i \sim \text{Exp}(\lambda) \quad (b) X_i \sim P(\mu) \quad (c) X_i \sim B(1, p)$$

Geben Sie jeweils die Likelihoodfunktion $f(x_1, \dots, x_n|\vartheta)$ in kompakter Form an. Verwenden Sie falls möglich das Produktsymbol \prod und/oder Summensymbol \sum .

Aufgabe 4: Erwartungswert und Varianz von Stichprobenfunktionen

Leiten Sie für die einfache Stichprobe X_1, \dots, X_n mit $E(X_i) = \mu$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ jeweils den Erwartungswert und die Varianz folgender Stichprobenfunktionen her:

$$(a) \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (b) Y = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$$

Aufgabe 5: Fraktile

X_i (mit $i = 1, \dots, n$) seien unabhängige, jeweils $N(\mu, \sigma)$ -verteilte Zufallsvariable. Geben Sie für jede der folgenden Größen die Zahl $x_{0.95}$ an, die mit 5% Wahrscheinlichkeit überschritten wird (zum Beispiel für (a): $P(x_{0.95} < A) = 0.05$).

$$(a) A = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^7 (X_i - \bar{X})^2$$

$$(b) B = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{137} (X_i - \bar{X})^2$$

$$(c) C = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{12} (X_i - \mu)^2$$

$$(d) D = \frac{\sum_{i=1}^{16} X_i - 16\mu}{4S} \quad (\text{mit } S^2: \text{Stichprobenvarianz von } X)$$

$$(e) E = \frac{\sum_{i=1}^{1600} X_i - 1600\mu}{40S}$$

$$(f) F = \sum_{i=1}^9 \frac{X_i - \mu}{3\sigma}$$