

3 Übungen zu Verteilungsparameter, Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 27. März 2015, 09:58



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Aufgabe 1: Reviewfragen

- Wie sind Modus, Median und α -Fraktile definiert?
- Wie lässt sich das α -Fraktile bestimmen, wenn der exakte Wert nicht vertafelt ist?
- Beschreiben Sie eine konvexe / konkave Funktion.
- Was ist die Varianz / Standardabweichung einer Zufallsvariablen?
- Was ist der Unterschied zwischen Stichprobenmittel \bar{X} und Erwartungswert $E(X)$?
- Wie lässt sich für diskrete Zufallsvariablen X, Y die Rand-Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ von $f(x, y)$ bestimmen?
- Was besagt der zentrale Grenzwertsatz?

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz, Modus und Median folgender Verteilungen der Zufallsvariablen X :

(a) X diskret mit

| | | | | | |
|----------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f(x_i)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

(b) X diskret mit

| | | | | | | | |
|----------|------|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| x_i | -2 | -1 | 0 | 2 | 4 | 7 | 8 |
| $f(x_i)$ | 0.05 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.05 |

(c) X stetig mit

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 2x & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3:

Die diskreten Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig und wie folgt verteilt:

| | | | |
|------------|-----|-----|---|
| x_i | 0 | 1 | 2 |
| $f_1(x_i)$ | 0.1 | 0.3 | |

| | | | |
|------------|-----|---|-----|
| y_i | 2 | 4 | 6 |
| $f_2(y_i)$ | 0.2 | | 0.1 |

Bestimmen Sie die fehlenden Einzelwahrscheinlichkeiten und dann die Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x_i, y_j)$.

Aufgabe 4:

Gegeben ist die *unvollständige* Verteilungstabelle der diskreten zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y)

| | | | | | |
|----------------|-------|------|-------|--|-----|
| | Y | | | | |
| $X \backslash$ | 0 | 1 | 2 | | |
| 2 | 0.07 | | | | 0.2 |
| 3 | | 0.15 | 0.175 | | |
| 4 | 0.105 | 0.09 | | | 0.3 |
| | | 0.3 | | | |

Bestimmen Sie die fehlenden Einzelwahrscheinlichkeiten und dann $f_1(x_i)$, $f_2(y_j)$, $E(X)$, $\text{Var}(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(Y)$. Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 5:

Die Verteilung einer stetigen zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y) hat die Dichtefunktion

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x + y) & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \quad 2 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie

- (a) die Konstante k ,
- (b) die Dichten $f_1(x)$ und $f_2(y)$ der Randverteilungen,
- (c) die Erwartungswerte $E(X)$ und $E(Y)$, sowie die Varianzen $\text{Var}(X)$ und $\text{Var}(Y)$ und
- (d) die Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq 1.6, Y \leq 2.2)$ und $P(1.1 \leq X \leq 1.5, 2.3 \leq Y \leq 2.6)$

Aufgabe 6:

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $H(y)$ und die Dichtefunktion $h(y)$ für die von X abhängige Zufallsvariable $Y = \ln(X)$.

Hinweis: Bestimmen Sie in folgender Reihenfolge:

1. den Wertebereich von Y
2. die Verteilungsfunktion $H(y) = P(Y \leq y) = P(\ln X \leq y)$
3. die Dichtefunktion $h(y) = \frac{dH(y)}{dy}$

Aufgabe 7:

Zeigen Sie, dass für $Y = g(X)$ der Erwartungswert $E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x) dx$ ist.

Hinweis: Gehen Sie der Einfachheit halber davon aus, dass $g(X)$ stetig und streng monoton ist. Nutzen Sie die Erkenntnisse aus der vorigen Aufgabe.