③ Verteilungsparameter, Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 14. April 2015, 10:26

Die nummerierten Felder bitte während der Vorlesung ausfüllen.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Verteilungsparameter[1]

1.1 Lageparameter

Modus oder Modalwert x_{Mod}**:** (siehe auch [Pap11, Seite 486])

1

Im Allgemeinen *nicht* eindeutig, zum Beispiel Gleichverteilung.

Beispiele:

- Normalverteilung: 2
- Diskrete Verteilung mit

x	0	1	2
$f(x)$	0.25	0.5	0.25

$\Rightarrow$ 3

Median oder Zentralwert x_{Med}**:**

4

Beispiele:

- Normalverteilung: 5
- Diskrete Verteilung oben: 6

α-**Fraktil** x_α (wird auch Quantil, oder Perzentil genannt)

7

Beispiel: $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(3,2)$

8

$x_{0.975} =$

$x_{0.025} =$

$y_{0.025} =$

[1] [Pap11, Teil II, Kapitel 5]

Hinweise:

9

- $x_{\text{Med}} =$
- Falls x_α nicht vertafelt $\Rightarrow$ Interpolation:

10

Beispiel: $X \sim N(0,1)$

11

$x_{0.6} \approx$

Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ bzw. μ:

12

Beispiele:

- Normalverteilung: $\mathrm{E}(X) = \mu$
- Diskrete Verteilung oben:

13

Rechenregeln für den Erwartungswert

14

(R1) Ist f symmetrisch bezüglich a, so gilt

15

Beispiel: Gleichverteilung:

(R2) Ist $Y = g(X)$, so gilt

16

Beispiel: X gleichverteilt in $[1, 4]$

17

$\mathrm{E}(X) \quad =$

$\mathrm{E}(X^2) \quad =$

(R3) **Lineare Transformation:**

18

Spezialfall von (R2) mit $g(x) = a+bx$:

(R4) **Summenbildung:**

19

Beispiel: X gleichverteilt in $[0, 10]$, $Y \sim N(1, 1)$, $Z = X + 5Y$

20

$\mathrm{E}(Z) =$

(R5) **Unabhängigkeit:**

21

X, Y unabhängig $\Rightarrow$

22

(R6) Ist stets $X \leqq Y$, so gilt

(R7) **Jensensche Ungleichung:** In der Situation (R2) gilt:

23

Beispiel: X gleichverteilt in $[1,4]$, $g(x)=x^2$ (vgl. (R2))

24

1.2 Streuungsparameter

Varianz $\mathrm{Var}(X)$ oder σ^2: Erwartungswert der quadratischen Abweichung vom Erwartungswert:

25

Standardabweichung $\mathrm{Sta}(X)$ oder σ: $\mathrm{Sta}(X)=\sigma=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Beispiel: Diskrete Verteilung oben:

26

$\mathrm{Var}(X) =$

Rechenregeln für die Varianz

R1 **Verschiebungssatz:**

27

Beispiel: Diskrete Verteilung oben:

28

R2 **Lineare Transformation:**

29

R3 **Summenbildung:**

30

Voraussetzung: Unabhängigkeit der X_i!

1.3 Erwarungswert und Varianz wichtiger Verteilungen

Verteilung von X	$\mathrm{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
	31	
Binomialverteilung $B(n, p)$		
Hypergeom. Verteilung $Hyp(N, M, n)$		
Poisson-Verteilung $P(\mu)$		
Gleichverteilung in $[a, b]$ mit $a < b$		
Exponentialverteilung $Exp(\lambda)$		
Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$		

1.4 Weitere Ausagen über Erwartungswert und Varianz

1. Ist X beliebig verteilt mit $\mathrm{E}(X) = \mu$ und $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, so besitzt

   32

   den Erwartungswert 33 und die Varianz 34

2. Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ und $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$, so besitzt das Stichprobenmittel

35

den Erwartungswert 36 und die Varianz 37

3. **Ungleichung von Tschebyscheff:**

38

wobei X beliebig verteilt sein darf.

39

1.5 Kovarianz und Korrelation

Kovarianz $\mathrm{Cov}(X, Y)$**:**

40

Korrelationskoeffizient $\varrho(X, Y)$**:**

41

Bemerkungen:

- $\varrho \in [-1, 1]$
- $|\varrho| = 1 \Leftrightarrow Y = a + bX$ mit $(b \neq 0$
- $\varrho = 0 \Leftrightarrow X, Y$ unkorreliert

1.6 Weitere Aussagen über Kovarianz und Korrelation

- Sind X, Y unabhängig, so gilt:

42

$\Rightarrow$ Aus Unabhängigkeit folgt Unkorreliertheit.

- Rechenregeln für die Kovarianz:

43

- Summe zweier Zufallsvariablen:

44

$\mathrm{Var}(X+Y) =$

- Differenz zweier Zufallsvariablen:

45

$\mathrm{Var}(X-Y) =$

1.7 Übungsaufgaben

[Pap11, Zu Abschnitt 5, Seite 459ff]

2 Mehrdimensionale Zufallsvariablen[2]

2.1 Mehrdimensionale diskrete Zufallsvariablen

- $(X_1, \dots, X_n)$ heißt *diskret,* falls der Wertebereich endlich ist.
- Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

46

[2] [Pap11, Teil II, Kapitel 7]

- Darstellungsmöglichkeiten: Tabelle, Streuungsdiagramm, Stabdiagramm.

47

2.2 Mehrdimensionale stetige Zufallsvariablen

- $(X_1, \ldots, X_n)$ heißt *stetig,* wenn es eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ gibt, so dass die Verteilungsfunktion F folgende Gestalt hat:

48

- $f(x_1, \ldots, x_n)$ heißt *gemeinsame Dichte* von $(X_1, \ldots, X_n)$
- Wir beschäftigen uns im Weiteren vor allem mit zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y) oder (X_1, X_2)

49

- Randverteilungsfunktion:
- Rand-Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

50

- Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

51

- Unabhängigkeit: $(X_1, \ldots, X_n)$ sind genau dann unabhängig, wenn gilt:

52

2.3 Gesetz der großen Zahlen

- Gegeben: Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit den Eigenschaften:

53

- Gesucht: Verhalten von

54

wenn n laufend erhöht wird.

- Bekannt: siehe Lücken 35, 36 und 37:

55

56

- Ungleichung von Tschebyscheff (Lücke 38)

57

angewandt auf

58

ergibt

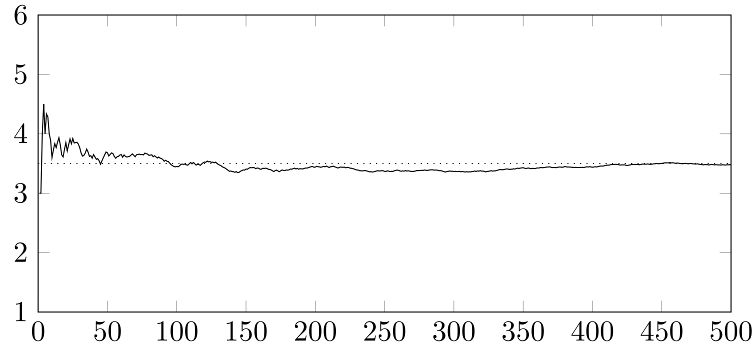
Für $n \to \infty$ folgt dann das *Gesetz der großen Zahlen:*

59

- Beispiel: Simulation 500 mal Würfeln

60

$\mathrm{E}(X) =$



2.4 Zentraler Grenzwertsatz

- Summen von i.i.d. Zufallsvariablen sind für große n näherungsweise 61

- Beispiel: X_1, X_2, X_3 in $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ gleichverteilt

  $Z_1 = X_1$ $\quad$ $Z_2 = X_1 + X_2$ $\quad$ $Z_3 = X_1 + X_2 + X_3$

  62 $\quad$ 63 $\quad$ 64

$\Rightarrow$ Zentraler Grenzwertsatz:

65

- Approximationsvoraussetzungen:
  - Im Allgemeinen: 66

   - Spezialfall Binomialverteiluing: 67

- Gauß-Statistik:

68

Beispiel:
Gegeben: $X_1, \ldots, X_{12}$ gleichverteilt in $[0, 1]$

Gesucht: approximative Verteilung von 69

Mit den Lücken 18, 19, 29 und 30 folgt

70

2.5 Übungsaufgaben

[Pap11, Zu Abschnitt 7, Seite 467ff]