1 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Zufallsvariablen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 18. Mai 2015, 09:29

Die nummerierten Felder bitte während der Vorlesung ausfüllen.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dieses und die folgenden Skripte basieren auf dem Foliensatz zum Buch [BBK12] sowie auf [Pap11]. Für die Vorlesung benötigen Sie nur [Pap11], das Sie als eBook aus dem Netz der DHBW-Stuttgart kostenlos herunterladen können.

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung[1]

2.1 Zufallsvorgänge

Zufallsvorgang

1

Elementarereignis ω

2

3

Ergebnismenge Ω

4

Ergebnis

5

Beispiel: Werfen zweier Würfel

6

2.2 Ereignisse und ihre Darstellung

Ereignis A

7

8

[1] [Pap11, Teil II, Kapitel 1 bis 3]

Beispiel: Werfen zweier Würfel

Ereignis	verbal	formal
A	Augensumme = 4	9
B	Erste Zahl = 2	10

Tabelle 1: Sprech-/Schreibweisen bei Bildung von Ereignissen

	Beschreibung des zugrundeliegenden Sachverhalts	Bezeichnung (Sprechweise)	Darstellung in Ω (Schreibweise als Teilmenge)
1.	A tritt sicher ein	A ist *sicheres* Ereignis	11
2.	A tritt sicher nicht ein	A ist *unmögliches* Ereignis	12
3.	wenn A eintritt, tritt B ein	A ist *Teilereignis* von B	13
4.	genau dann, wenn A eintritt, tritt B ein	A und B sind *äquivalente* Ereignisse	14
5.	wenn A eintritt, tritt B nicht ein	A und B sind *disjunkte* Ereignisse	15
6.	genau dann, wenn A eintritt, tritt B nicht ein	A und B sind *komplementäre* Ereignisse	16
7.	genau dann, wenn *mindestens ein* A_j eintritt (auch: genau dann, wenn A_1 *oder* A_2 oder ... eintritt), tritt A ein	A ist *Vereinigung* der A_j	17
8.	genau dann, wenn *alle* A_j eintreten (auch: genau dann, wenn A_1 *und* A_2 *und* ... eintreten)	A ist *Durchschnitt* der A_j	18

2.3 Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

Wahrscheinlichkeit $P(A)$

19

Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. 20
2. 21
3. 22

Laplace-Wahrscheinlichkeit

23

Voraussetzung: Alle $\omega \in \Omega$ 24

Beispiel: Werfen zweier Würfel, Augensumme gleich vier: $A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

25

Urnenmodell: Ziehe k Objekte aus einer Menge von n verschiedenen Objekten ([Pap11, Tabelle 1, Seite 264])

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung	
Kombinationen k-ter Ordnung	26	27	ungeordnete Stichproben
Variationen k-ter Ordnung	28	29	geordnete Stichproben
	Ziehung ohne Zurücklegen	Ziehung mit Zurücklegen	

Beispiel: Parallelschaltung von vier Widerständen, wobei insgesamt 6 verschiedene Widerstände $R_1, R_2, \ldots, R_6$ zur Verfügung stehen. Wie viele *verschiedene* Schaltmöglichkeiten gibt es, wenn jeder der 6 Widerstände a) höchstens einmal und b) mehrmals, also bis zu viermal verwendet werden darf? ([Pap11, Seite 259])

30

a)

31

b)

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

32

1.

33

2.

34

3.

35

4.

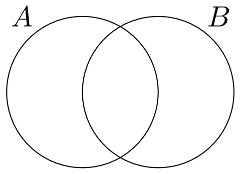
36

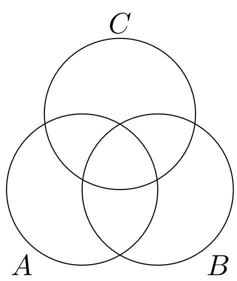
5.

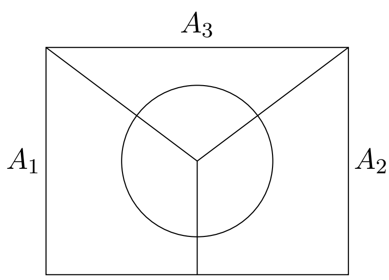
37

38

6.







Beispiel: Einmaliges Würfeln

$P(A) = P(\text{„Augenzahl} \geqq 5\text{“})$

39
$=$

40
$=$

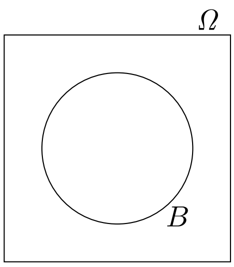
41
$=$

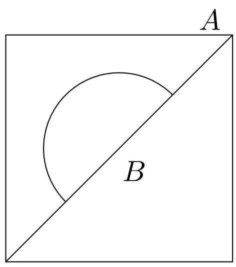
Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit B hängt von Ereignis A ab.

42

- Formal:
- Im Mengendiagramm:





43

44

Baumdiagramm

45

Beispiel: Urnenmodell, 5 rote, 2 schwarze Kugeln, 3-mal Ziehen ohne Zurücklegen.

46

Totale Wahrscheinlichkeit: Unbedingte aus bedingten Wahrscheinlichkeiten erschließen. Aus Lücke 38 und 42 folgt:

47

Formel von Bayes: Umkehren von Argument und Bedingung.

48

Unabhängigkeit von Ereignissen: A, B unabhängig: Das Eintreten von A ist *nicht* informativ bezüglich $P(B)$ und umgekehrt.

- Formal: 49
- Äquivalent zu: 50

- Dann gilt: 51

- Beispiel: Zwei Würfel unabhängig werfen.

A : „erster Würfel gleich 6“
B : „zweiter Würfel gleich 6“ } ⇒ 52

2.4 Übungsaufgaben

[Pap11, Teil II, Zu Abschnitt 1 bis 3, Seite 451ff]

3 Zufallsvariablen[2]

- Beschreibung von Ereignissen durch reelle Zahlen.

  Formal: 53

- **Vor** Durchführung des Zufallsvorgangs:

  Zufallsvariable oder Wertebereich: 54

- **Nach** Durchführung des Zufallsvorgangs:

  Wert oder Realisation: 55

- **Beispiel:** Würfeln mit Farbwürfel mit der Ergebnismenge

  $\Omega = \{blau,\ grün,\ lila,\ rot,\ schwarz,\ weiß\}$

  Wir ordnen jeder Farbe eine (sinnvolle) reelle Zahl zu, zum Beispiel $b = 0$, $g = 1$, ...

  somit ist der Wertebereich = 56

57

3.1 Diskrete Zufallsvariablen

- X heißt *diskret,* falls ihr Wertebereich 58 ist.

[2] [Pap11, Teil II, Kapitel 4]

- Dann ist $P(X = x)$ *nicht* 59
- Die Funktion

  $f(x) =$ 60

  heißt *Wahrscheinlichkeitsfunktion* oder 61 Wahrscheinlichkeit.
- Für die Verteilungsfunktion gilt dann:

  $F(x) =$ 62

  Die Verteilungsfunktion heißt daher auch 63 Wahrscheinlichkeit.
- Beispiel: Münze 2 mal werfen, X: Anzahl „Kopf“

	(Z, Z)	(Z,K), (K,Z)	(K,K)
x_i	64		
$f(x_i)$			

65

$F(x) =$

66

67

3.2 Stetige Zufallsvariablen

- X heißt *stetig*, falls $F(x)$ stetig ist.
- Dann gilt: 68
- $F'(x) = f(x)$ heißt *Dichtefunktion* von X.
- Zudem gilt:

69

3.2.1 Eigenschaften

- 70 für alle $x \in \mathbb{R}$
- Wegen $F(\infty) = 1$ muss stets gelten: 71
- 72 für alle $x \in \mathbb{R}$
- 73
- Intervallgrenzen spielen keine Rolle:

74

3.2.2 Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{1}{10}, & \text{falls} \quad 0 \leqq x \leqq 10 \\ 0, & \text{falls} \quad x > 10 \end{cases}$$

- Verteilungsfunktion:

75

3.3 Übungsaufgaben

[Pap11, Teil II, Zu Abschnitt 4, Seite 457ff]

Literatur

[BBK12] Günter Bamberg, Franz Baur und Michael Krapp. *Statistik*. 17. Auflage. Oldenbourg Verlag, 2012.

[Pap11] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 6. Auflage. Bd. 3. Vieweg + Teubner, 2011.