Mathematik 2, Statistik

Klausur vom 21.05.2014

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 21. Mai 2014, 16:24

Name	Vorname

Drei Punkte pro Aufgabe. Mindestpunktzahl zum Bestehen: 10 Punkte. Hilfsmittel: maximal zehn einseitig oder fünf beidseitig beschriftete DIN-A4-Spickzettel beliebigen Inhalts, möglichst selbst verfasst oder zusammengestellt; beliebiger Taschenrechner; kein Skript, keine andere Formelsammlung, kein Computer, kein Mobiltelefon.

Aufgabe 1:

Einem Kasten, der 16 weiße und 16 schwarze Schachfiguren enthält, werden nacheinander 3 Figuren zufällig und ohne Zurücklegen entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, hierbei höchstens zwei weiße Figuren zu bekommen?

Aufgabe 2:

Die Höchstgeschwindigkeit X eines Autotyps sei normalverteilt, $X \sim N(\mu, \sigma)$. Es wurden Testfahrten mit 25 zufällig ausgewählten Fahrzeugen gemacht, wobei sich die Stichproben-Standardabweichung $s = 3\,\text{km/h}$ ergab. Bestimmen Sie das 95 % Konfidenzintervall für die Varianz σ^2 der Höchstgeschwindigkeit.

Aufgabe 3:

Eine Maschine in einer Glühbirnenfabrik stellt seit einiger Zeit eine erhöhte Anzahl defekter Glühbirnen her. Normal produziert die Maschine einen Ausschuss von $p_0 = 5\,\%$. Man vermutet nun einen höheren Anteil der Ausschussstücke. Ein Testverfahren soll Klarheit schaffen. Man testet 250 Glühbirnen, von denen 20 defekt sind. Weil eine neue Maschine oder Reparatur sehr teuer ist, soll das Risiko, die Maschine fälschlicherweise als nicht funktionsfähig einzustufen, mit $\alpha = 1\,\%$ sehr gering sein. Testen Sie die Hypothese, dass die Maschine höchstens 5 % Ausschuss produziert.

Aufgabe 4:

Armbanduhren eines Herstellers werden auf Ganggenauigkeit (= Zufallsvariable X) und Robustheit (= Zufallsvariable Y) untersucht. Durchschnittlich ergibt sich, dass von den getesteten Armbanduhren

- 85 % genau und robust,
- 10 % ungenau und
- 5 % zwar robust aber ungenau sind.

Füllen Sie die folgende Wahrscheinlichkeitstabelle aus und bestimmen Sie

- Erwarungswerte und Varianzen sowie
- die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten.

von X und Y.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Y</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$y_1 = 1$
robust</td><td>$y_2 = 2$
anfällig</td></tr>
<tr><td rowspan="2">X</td><td>$x_1 = 1$
genau</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$x_2 = 2$
ungenau</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Aufgabe 5:

In folgender Tabelle ist jeweils der ganzzahlige Teil der Klausurnoten einer Mathematik-Klausur sowie deren Häufigkeit aufgeführt. Untersuchen Sie auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$ die Annahme, dass die Noten mit $\mu = 2.4$ und $\sigma = 0.9$ normalverteilt sind.

Note	Häufigkeit
1	5
2	7
3	5
4 und schlechter	0

Aufgabe 6:

Die Verteilungsdichte eines Merkmals X ist

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Varianz von X.

Aufgabe 7:

Ein Testinstitut bemängelt die Akkulaufzeit eines bestimmten Akkutyps bei 10 °C. Sie sei signifikant kürzer als bei 20 °C. Das Institut hatte die Laufzeit von 6 Akkus bei 10 °C und bei 20 °C gemessen und aus den Akkulaufzeiten Stichproben-Mittelwerte und -Standardabweichungen berechnet:

- 10 °C: $\bar{x} = 4.02\,\mathrm{h}$, $s_x = 0.331\,\mathrm{h}$
- 20 °C: $\bar{y} = 4.55\,\mathrm{h}$, $s_y = 0.423\,\mathrm{h}$

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Akkulaufzeit normalverteilt ist. Überprüfen Sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.05$ die Behauptung des Testinstituts.
Hinweis: Nutzen Sie die Rechenregeln für die Varianz.

Aufgabe 8:

Die Zeit, die eine Maschine für einen bestimmten Arbeitsvorgang benötigt, sei eine Zufallsvariable X, deren Dichtefunktion f in Abhängigkeit eines Parameters $\vartheta \in \begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix}$ folgende Gestalt hat:

$$f(x|\vartheta) = \begin{cases} \vartheta \cdot (x - x^2 - \frac{1}{6}) + 1 & \text{für } x \in \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit dieser Dichtefunktion $f(x|\vartheta)$ ergeben sich folgende Erwartungswerte:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_i) &= \frac{1}{2} \\ \mathrm{E}(X_i^2) &= \frac{1}{3} - \frac{\vartheta}{180} \end{aligned}$$

Zu X liege eine einfache Stichprobe $X_1, \cdots, X_n$ vor. Wie müssen die Zahlen α und β gewählt werden, damit die Schätzfunktion

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha X_i + \beta X_i^2 \right)$$

erwartungstreu für ϑ ist?

Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\Phi(\mu)$ der Standardnormalverteilung

μ	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabelle 2: Fraktile der $N(0,1)$-Verteilung

α	x_α	α	x_α
0.001	-3.09	0.9	1.28
0.005	-2.58	0.95	1.65
0.01	-2.33	0.975	1.96
0.025	-1.96	0.99	2.33
0.05	-1.65	0.995	2.58
0.1	-1.28	0.999	3.09

Tabelle 3: Fraktile der χ^2-Verteilung

	x_α									
f	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0	0	0.001	0.004	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.051	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.82	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	9.24	11.1	12.8	15.1	16.8
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.2	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12	14.1	16	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.4	15.5	17.5	20.1	22
9	1.74	2.09	2.7	3.33	4.17	14.7	16.9	19	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	16	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.6	3.05	3.82	4.58	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.4	5.23	6.3	18.5	21	23.3	26.2	28.3
13	3.56	4.11	5.01	5.89	7.04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.08	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.6	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32	34.3
17	5.7	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	26	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40
21	8.03	8.9	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11	12.3	14	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	32	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	36.7	40.1	43.2	47	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51
29	13.1	14.3	16	17.7	19.8	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47	50.9	53.7

Tabelle 4: Fraktile der t-Verteilung

	x_α				
f	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	3.08	6.31	12.7	31.8	63.7
2	1.89	2.92	4.3	6.96	9.93
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.6
5	1.48	2.02	2.57	3.37	4.03
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
7	1.42	1.9	2.37	3	3.5
8	1.4	1.86	2.31	2.9	3.35
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
11	1.36	1.8	2.2	2.72	3.11
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01
14	1.34	1.76	2.15	2.62	2.98
15	1.34	1.75	2.13	2.6	2.95
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.9
18	1.33	1.73	2.1	2.55	2.88
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86
20	1.32	1.73	2.09	2.53	2.85
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82
23	1.32	1.71	2.07	2.5	2.81
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.8
25	1.32	1.71	2.06	2.48	2.79
26	1.31	1.71	2.06	2.48	2.78
27	1.31	1.7	2.05	2.47	2.77
28	1.31	1.7	2.05	2.47	2.76
29	1.31	1.7	2.04	2.46	2.76
30	1.31	1.7	2.04	2.46	2.75

Lösung 1:

Ziehen ohne Zurücklegen $\Rightarrow X \sim Hyp(N, M, n) = Hyp(32, 12, 3)$.
Gesucht: X: gezogene weiße Figuren, $P(X \leq 2)$

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= 1 - P(X = 3) \\
&= 1 - \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\
&= 1 - \frac{\binom{16}{3}\binom{16}{0}}{\binom{32}{3}} \\
&= 1 - 0.1129 \\
&= 0.8871
\end{aligned}$$

Alternativ: X: gezogene schwarze Figuren, $P(X \geq 1)$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\
&= 1 - \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\
&= 1 - \frac{\binom{16}{0}\binom{16}{3}}{\binom{32}{3}} \\
&= 1 - 0.1129 \\
&= 0.8871
\end{aligned}$$

Lösung 2:

Konfidenzintervall für σ^2 bei Normalverteilung

1. Konfidenzniveau $1 - \alpha = 95\,\%$
2. Fraktile:

$$\begin{aligned}
\chi^2(n-1) = \chi^2(24) : c_1 &= x_{\alpha/2} = x_{0.025} = 12.4 \\
c_2 &= x_{1-\alpha/2} = x_{0.975} = 39.4
\end{aligned}$$

3. $(n-1)s^2 = 24 \cdot 3^2 = 216$
4. $\vartheta_{\mathrm{u}} = \dfrac{(n-1)s^2}{c2} = \dfrac{216}{39.4} = 5.48$
   $\vartheta_{\mathrm{o}} = \dfrac{(n-1)s^2}{c1} = \dfrac{216}{12.4} = 17.42$
5. $\begin{bmatrix} 5.5 & 17.4 \end{bmatrix}$

Lösung 3:

Approximativer Gaußtest, $G \sim B(1, p)$ mit $n = 250 > 30$

$$H_0 : p \leq 0.05$$
$$H_1 : p > 0.05$$

1. $\alpha = 0.01$
2. Testfunktionwert

$$\begin{aligned} v &= \frac{\bar{x} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} \sqrt{n} \\ &= \frac{0.08 - 0.05}{\sqrt{0.05(1 - 0.05)}} \sqrt{250} \\ &= 2.18 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} &N(0, 1) : x_{1-\alpha} = x_{0.99} = 2.33 \\ &B = (2.33, \infty) \end{aligned}$$

4. $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

Lösung 4:

		Y		
		$y_1 = 1$ robust	$y_2 = 2$ anfällig	
X	$x_1 = 1$ genau	**0.85**	0.05	0.9
	$x_2 = 2$ ungenau	**0.05**	0.05	**0.1**
		0.9	0.1	1

Randverteilungen sind identisch $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 1 \cdot 0.9 + 2 \cdot 0.1 = 1.1 \\
&\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{E}(Y^2) = 1^2 \cdot 0.9 + 2^2 \cdot 0.1 = 1.3 \\
&\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = 1.3 - 1.1^2 = 0.0.09 \\
&\mathrm{E}(X \cdot Y) = 1 \cdot 1 \cdot 0.85 + 1 \cdot 2 \cdot 0.05 + 2 \cdot 1 \cdot 0.05 + 2 \cdot 2 \cdot 0.05 = 1.25 \\
&\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(X \cdot Y) - \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y) = 1.25 - 1.1 \cdot 1.1 = 0.04 \\
&\varrho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{0.04}{0.09} = 0.44
\end{aligned}$$

Lösung 5:

1. $\alpha = 0.05$
2. letzten beiden Intervalle zusammenlegen

Intervall	Häufigkeit	p_i	np_i
$(-\infty, 2)$	5	0.3284	5.5821
$[2, 3)$	7	0.4191	7.1255
$[3, , \infty)$	5	0.2525	4.2924

$$v = \sum_{j=1} \frac{h_j^2}{np_j} - n = 0.18$$

3. $\chi^2(2) : x_{1-\alpha} = x_{0.95} = 5.99 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 5.99 & \infty \end{pmatrix}$
4. $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht ablehnen.

Man kann davon ausgehen, dass die Noten normalverteilt sind.

Lösung 6:

Wegen Symmetrie: $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 f(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) (-6x^2 + 6x) \,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{6\,x^5}{5} + 3\,x^4 - \frac{5\,x^3}{2} + \frac{3\,x^2}{4} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{20} = 0.05
\end{aligned}$$

Lösung 7:

Differenztest, Einstichproben-t-Test.

$$
\begin{aligned}
H_0 :&\mu_1 = \mu_2 \\
H_1 :&\mu_1 \leq \mu_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} = -0.53 \\
&\operatorname{Var}(Z) = \operatorname{Var}(X - Y) = \operatorname{Var}(x) + \operatorname{Var}(Y) = s_x^2 + s_y^2 = 0.2885 \\
&s_z = \sqrt{\operatorname{Var}(Z)} = 0.5371
\end{aligned}
$$

1. $\alpha = 0.05$
2. Testfunktionswert
$$
\begin{aligned}
v &= \frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n} \\
&= \frac{-0.53}{0.5371} \cdot 2.4495 \\
&= -2.42
\end{aligned}
$$
3. $$t(n-1) = t(5) : x_{1-\alpha} = x_{0.95} = 2.02 \Rightarrow B = (-\infty, -2.02)$$
4. $v \in B \Rightarrow H_0$ ablehnen, die Akkulaufzeit ist bei 10 °C signifikanz kürzer.

Lösung 8:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{E}(\hat{\Theta}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha \operatorname{E}(X_i) + \beta \operatorname{E}(X_i^2)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha\frac{1}{2} + \beta\left(\frac{1}{3} - \frac{\vartheta}{180}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(n \cdot \frac{1}{2}\alpha + n \cdot \frac{1}{3}\beta - n \cdot \frac{\vartheta}{180}\beta\right) \\
&= \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta - \frac{\vartheta}{180}\beta \stackrel{!}{=} \vartheta \\
\Rightarrow &\beta = -180 \quad \alpha = 120
\end{aligned}
$$