Klausur T2INF2001.2 Statistik
22.05.2013 Name: ____________________

Punktzahl für Note 1: 48 Punkte, Gesamtpunktzahl: 50 Punkte

Bearbeiten Sie bitte *jede* Aufgabe auf einem oder mehreren *separaten* Blättern. Das Aufgabenblatt ist mit **abzugeben**. Vergessen Sie bitte nicht, auf *jedem* Aufgabenblatt und auf *jedem* Lösungsblatt Ihren Namen *gut leserlich* anzugeben.
Der Lösungsweg ist *stets* anzugeben, er sollte in allen Schritten durch **eigene** Rechnungen deutlich erkennbar, begründet und nachvollziehbar sein. Nur dann kann nach detaillierter Bewertung die volle Punktzahl erreicht werden.

---

1. 12 Pkte

(a) (6 Pkte) Eine Firma erhält eine Lieferung von 12 Rechnern. Davon sind zwei Rechner defekt. Es werden zufällig fünf Geräte ausgewählt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter diesen fünf Geräten *wenigstens* ein defektes Gerät ist?

(b) (6 Pkte) Diesmal erhält die Firma eine Lieferung von 1000 Rechnern. Davon sind 20 defekt. Es werden zufällig 100 Geräte ausgewählt. Approximieren Sie mit Hilfe der Poisson-Verteilung die Wahrscheinlichkeit, dass unter diesen 100 Geräten *genau* ein defektes Gerät ist. Ist die Approximation mit der Poisson-Verteilung hier geeignet?

---

2. Berechnen sie $F(8.5)$, also den Wert der Verteilungsfunktion an der Stelle 8.5, 12 Pkte

(a) (2 Pkte) falls x gleichverteilt über $[4; 14]$ ist

(b) (2 Pkte) falls x jeden der Werte 2, 5, 8, 11, 14 mit Wahrscheinlichkeit 0.2 annimmt,

(c) (2 Pkte) falls x einer $n(8.5, 1)$-Verteilung genügt,

(d) (2 Pkte) falls x einer $n(10, 2)$-Verteilung genügt,

(e) (2 Pkte) falls x Poisson-verteilt ist mit dem Parameter $\lambda = 10$,

(f) (2 Pkte) falls x exponentialverteilt ist mit dem Parameter $\lambda = 0.1$.

---

3. Die Wartezeiten (in Millisekunden) eines Betriebssystem-Prozesses seien unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit der Dichte 14 Pkte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) (8 Pkte) Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzfunktion $\hat{\Theta}_2 = \hat{\lambda}(x_1, x_2)$ für $n = 2$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, prüfen Sie die zweite Ableitung, und berechnen Sie dann den Schätzwert $\hat{\lambda}$ für die Stichprobe $(x_1, x_2) = (2.2, 1.8)$.

(b) (6 Pkte) Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzfunktion $\hat{\Theta}_n$ für allgemeines n. Stellen Sie die Likelihood-Funktion $f(x_1, \ldots, x_n|\lambda)$ und $\hat{\Theta}_n$ möglichst kompakt dar. (Prüfung der zweiten Ableitung ist nicht notwendig.)

4. Bauteile einer Serie werden auf Maßhaltigkeit (= Zufallsvariable X) und Wasserdichtigkeit (= Zufallsvariable Y) getestet. Durchschnittlich ergibt sich, dass von den getesteten Bauteilen

12 Pkte

- 70% wasserdicht und maßhaltig,
- 10% undicht und
- 5% zwar maßhaltig aber undicht sind.

(a) (4 Pkte) Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die beiden fehlenden Spalten- und Zeilenbezeichnungen und füllen Sie die Tabelle mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten aus.

		Y		
		$y_1 = 1$ wasserdicht	$y_2 = 2$ undicht	
X	$x_1 = 1$ maßhaltig			
	$x_2 = 2$ nicht maßh.			

(b) (2 Pkte) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X.
(c) (2 Pkte) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von Y.
(d) (4 Pkte) Bestimmen Sie die Kovarianz $\operatorname{Cov}(X, Y)$ und den Korrelationskoeffizienten $\varrho(X, Y)$. Sind X und Y demnach unabhängig?

Hinweis: Folgefehler auf Grund von falschen Berechnungen in vohergehenden Aufgabenteilen führen nicht zu Punktabzug.

Lösungen zu Klausur T2INF2001.2

1. (a) Die Anzahl X ist hypergeometrisch verteilt: $X \sim \mathrm{Hyp}(N, M, n) = \mathrm{Hyp}(12, 2, 5)$ ($n = 5$-faches Ziehen ohne Zurücklegen aus $N = 12$ Objekten, davon $M = 2$ markiert).

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = 1 - \frac{\binom{2}{0}\binom{10}{5}}{\binom{12}{5}} = 1 - \frac{1 \cdot 252}{792}$$
$$= 0.682$$

Alternativ:

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2)$$

Bewertung:

- 1 Punkt: Hypergeometrische Verteilung erkannt
- 2 Punkte: x, N, M, n richtig zugeordnet
- 2 Punkte: $P(x \geq 1)$ Wahrscheinlichkeit richtig angesetzt und Zahlen richtig eingesetzt
- 1 Punkt: Ergebnis korrekt.

□

1. (b) $X \sim P(\lambda)$ mit $\lambda = np = n \cdot \dfrac{M}{n} = 100 \cdot \dfrac{20}{1000} = 2$

$$P(X = 1) = f(1) = \frac{2^1}{1!}\mathrm{e}^{-2} = 0.27$$

Approximation ist wegen $p = \dfrac{M}{N} = 0.02 \leq 0.1$, $\lambda = np = 2 \leq 10$, $n = 100 \geq 50$ geeignet.
Bewertung:

- 1 Punkt: Parameter λ korrekt berechnet
- 2 Punkte: Wahrscheinlichkeit $P(X = 1)$ richtig angesetzt und Zahlen richtig eingesetzt.
- 1 Punkt: Ergebnis korrekt berechnet
- 2 Punkt: Alle Bedingungen für Eignung genannt und Eignung korrekt festgestellt.

☐

2. (a)
$F(8.5) = \dfrac{x-a}{b-a} = \dfrac{8.5-4}{14-4}$
$F(8.5) = 0.45$ Bewertung:

- 1 Punkt: Verteilung richtig angesetzt
- 1 Punkt: korrektes Ergebnis

☐

2. (b) Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x) = 0.2$ für $x \in \{2, 5, 8, 11, 14\}$:
$F(8.5) = P(X \leq 8.5) = f(2) + f(5) + f(8)$
$F(8.5) = 0.2 + 0.2 + 0.2 = 0.6$ Bewertung:

- 1 Punkt: Verteilung richtig angesetzt
- 1 Punkt: korrektes Ergebnis

☐

2. (c) aus $\mu = 8.5$ folgt $F(8.5) = 0.5$
alternativ: $\Phi(\dfrac{8.5-8.5}{1})$
aus N$(0,1)$-Tabelle $F(8.5) = \Phi(0) = 0.5$ Bewertung:

- 1 Punkt: Verteilung richtig angesetzt
- 1 Punkt: korrektes Ergebnis

☐

2. (d)
$\Phi(\dfrac{8.5-10}{2}) = \Phi(-0.75) = 1 - \Phi(0.75) = 0.2266$

- 1 Punkt: Verteilung richtig angesetzt
- 1 Punkt: korrektes Ergebnis

☐

2. (e)
$F(8.5) = P(X \leq 8.5) = P(X \leq 8) = F(8) = 0.3328$ (Tabelle)

- 1 Punkt: Verteilung richtig angesetzt
- 1 Punkt: korrektes Ergebnis

☐

2. (f)
$F(8.5) = 1 - \mathrm{e}^{-0.1 \cdot 8.5} = 0.5726$

- 1 Punkt: Verteilung richtig angesetzt
- 1 Punkt: korrektes Ergebnis

☐

3. (a) Maximum-Likelihood-Funktion:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2|\lambda) &= f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) = \lambda^4 x_1 x_2 \mathrm{e}^{-\lambda\cdot(x_1+x_2)} \\
\ln f(x_1, x_2|\lambda) &= \ln(\lambda^4 x_1 x_2 \mathrm{e}^{-\lambda\cdot(x_1+x_2)}) \\
\ln f(x_1, x_2|\lambda) &= 4\ln\lambda + \ln x_1 + \ln x_2 - \lambda\cdot(x_1+x_2)
\end{aligned}$$

Ableitung nullsetzen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln f(x_1, x_2|\lambda)}{\partial\lambda} &= \frac{4}{\lambda} - (x_1+x_2) = 0 \\
\Rightarrow \hat{\Theta} = \hat{\lambda}(x_1, x_2) &= \frac{4}{x_1+x_2}
\end{aligned}$$

Zweite Ableitung auf < 0 überprüfen

$$\frac{\partial^2 \ln f(x_1, x_2|\lambda)}{\partial\lambda^2}\Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} = -\frac{4}{\hat{\lambda}^2} = -x_1 - x_2 < 0$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} \text{ ist eine Maximum-Likelihood-Schätzfunktion}$$

Maximum-Likelihood-Schätzwert für die Stichprobe

$$\hat{\lambda}(2.2, 1.8) = \frac{4}{2.2+1.8} = 1$$

Bewertung:

- 1 Punkt: Maximum-Likelihood-Funktion richtig aufstellen
- 1 Punkt: Logarithmieren der ML-Funktion
- 1 Punkt: Auflösen der Produkte im Logarithmus in Summen
- 1 Punkt: Berechnung der 1. Ableitung
- 1 Punkt: Nullsetzen der 1. Ableitung
- 1 Punkt: Bestimmung von $Thetah$
- 1 Punkt: Überprüfung der 2. Ableitung auf < 0
- 1 Punkt: Bestimmung des Schätzwerts.

☐

3. (b)

$$f(x_1,\dots,x_n|\lambda) = \lambda^{2n}\prod_{i=1}^{n} x_i \mathrm{e}^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i}$$
$$\ln f(x_1,\dots,x_n|\lambda) = \ln(\lambda^{2n}\prod_{i=1}^{n} x_i \mathrm{e}^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i})$$
$$= 2n\ln\lambda + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$\frac{\partial f(x_1,\dots,x_n|\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$
$$\hat{\Theta} = \frac{2}{\bar{X}}$$

Bewertung:

- 1 Punkt: Likelihood-Funktion mit Summen- $\sum$ und Produktzeichen $\prod$
- 1 Punkt: Logarithmieren der ML-Funktion
- 1 Punkt: Auflösen der Produkte im Logarithmus in Summen
- 1 Punkt: Berechnung und Nullsetzen der 1. Ableitung
- 1 Punkt: Bestimmung von $\hat{\Theta}$
- 1 Punkt: Kompakte Darstellung von $\hat{\Theta}$ durch das Stichprobenmittel $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

☐

4. (a)

		Y: $y_1 = 1$ wasserdicht	$y_2 = 2$ undicht	$P(X = x_i)$
X	$x_1 = 1$ maßhaltig	**0.7**	**0.05**	0.75
	$x_2 = 2$ nicht maßh.	0.2	0.05	0.25
	$P(Y = y_i)$	0.9	**0.1**	**1**

Bewertung:

- 1 Punkt: Bekannte Wahrscheinlichkeiten richtig eingesetzt.
- 1 Punkt: Spalten- und Zeilenbezeichnung richtig ($P(X = x_i)$ oder $f(x_i)$, $P(Y = y_i)$ oder $f(y_i)$)
- 2 Punkte: Alle Wahrscheinlichkeiten richtig berechnet.

☐

4. (b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) = 1 \cdot 0.75 + 2 \cdot 0.25 = 1.25 \\
\mathrm{Var}(X) &= \sum_{i=1}^{2} (x_i - \mathrm{E}(x))^2 f(x_i) = (1 - 1.25)^2 \cdot 0.75 + (2 - 1.25)^2 \cdot 0.25 = 0.1875
\end{aligned}$$

Bewertung:

- 1 Punkt: Erwartungswert richtig angesetzt und berechnet.
- 1 Punkt: Varianz richtig angesetzt und berechnet.

□

4. (c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= y_1 f(y_1) + y_2 f(y_2) = 1 \cdot 0.9 + 2 \cdot 0.1 = 1.1 \\
\mathrm{Var}(Y) &= \sum_{i=1}^{2} (y_i - \mathrm{E}(y))^2 f(y_i) = (1 - 1.1)^2 \cdot 0.9 + (2 - 1.1)^2 \cdot 0.1 = 0.0900
\end{aligned}$$

Bewertung:

- 1 Punkt: Erwartungswert richtig angesetzt und berechnet.
- 1 Punkt: Varianz richtig angesetzt und berechnet.

□

4. (d)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} x_i y_j f(x_i, y_j) = 1 \cdot 1 \cdot 0.7 + 1 \cdot 2 \cdot 0.05 + 2 \cdot 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 2 \cdot 0.05 \\
&= 1.4 \\
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathrm{E}(X \cdot Y) - \mathrm{E}(x) \cdot \mathrm{E}(Y) \\
&= 1.4 - 1.25 \cdot 1.1 \\
&= 0.025 \\
\varrho(X, Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}\, X \cdot \mathrm{Var}\, Y}} = \frac{0.025}{\sqrt{0.1875 \cdot 0.0900}} \\
&= 0.1925
\end{aligned}$$

X und Y sind wegen $\varrho \neq 0$ nicht unabhängig. Bewertung:

- 1 Punkt: $\mathrm{E}(X, Y)$ richtig angesetzt und berechnet.
- 1 Punkt: $\mathrm{Cov}(X, Y)$ richtig angesetzt und berechnet.
- 1 Punkt: $\varrho(X, Y)$ richtig angesetzt und berechnet.
- 1 Punkt: Aus $\varrho \neq 0$ auf Unabhängigkeit geschlossen.

□