Teil I.
Aufgaben

② Aufgaben zur numerischen Integration

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 2016/11/06, 10:43:20 +01'00'

Aufgabe 1:. Reviewfragen

1.1

Aufgabe 2:. Modellanalyse

Bestimmen Sie für die folgenden Systeme jeweils die Simulationsdauer und die Zeitschrittweite nach den Faustformeln. Bestimmen Sie die stationären Zustände. $t_{\mathrm{sim}} = 5T_{\max}$, $\Delta t = T_{\min}/10$

2.1 Linearer Feder-Masse-Schwinger

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = u$$

mit $\zeta = 0.6$, $\omega = 0.5$

2.2 Schwingsystem mit progressiver Federkraft

$$\ddot{x} + b\dot{x} + c(x^3 + x) = 0$$

mit $b = 0.6$, $c = 0.25$. *Hinweis:* $\sqrt{-0.16 \pm 0.75\mathrm{j}} \approx 0.55 \pm 0.68\mathrm{j}$

2.3 Lorenz-Attraktor: nur die stationären Zustände bestimmen. Zusatzaufgabe: Bestimmung der Simulationsdauer und Zeitschrittweite mit Hilfe von Matlab.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x)\\ \dot{y} &= x(b - z) - y\\ \dot{z} &= xy - cz\end{aligned}$$

mit $a = 10$, $b = 28$ und $c = 8/3$

Aufgabe 3:. Konstruktion eines impliziten Runge-Kutta 2. Ordnung

Stellen Sie die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten auf, indem Sie mit der exakten Taylor-Reihe vergleichen. Stellen Sie das Butcher-Koeffizienten-Schema auf und geben Sie eine Lösung an.

Teil II. Lösungen

Lösung 1:. Reviewfragen

1.1

Lösung 2:. Modellanalyse

2.1 Stationärer Zustand $\dot{\boldsymbol{x}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.25 & -0.6 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 0.6\lambda + 0.25 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -0.3 \pm 0.4\mathrm{j}$$
$$\Rightarrow T_1 = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi$$
$$t_{\mathrm{sim}} = 5 \cdot 5\pi = 25\pi$$
$$\Delta t = \frac{1}{3} \approx 0.33$$

2.2 Stationäre Zustände:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{0} \\
&= \begin{bmatrix} x_2 \\ -c(x_1^3 + x_1) - bx_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_{2,\mathrm{s}} = 0 \Rightarrow x_{1,\mathrm{s}} = (0, \pm\mathrm{j}) \\
\boldsymbol{A}(x_{1,\mathrm{s}}, x_{2,\mathrm{s}}) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c(3x_{1,\mathrm{s}}^2 + 1) & -b \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 0.6\lambda + 0.25(3x_{1,\mathrm{s}} + 1) = 0 \\
\Rightarrow \lambda(x_{1,\mathrm{s}}, x_{2,\mathrm{s}}) &= -0.3 \pm \sqrt{0.09 - 0.25(3x_{1,\mathrm{s}} + 1)} \\
\lambda_{1,2}(0,0) &= -0.3 \pm 0.4\mathrm{j} \\
\lambda_{3,4}(\pm\mathrm{j}, 0) &= -0.3 \pm \sqrt{-0.16 \pm 0.75\mathrm{j}} \\
&= 0.25 \pm 0.68\mathrm{j} \\
T_1 &= \frac{10}{3}, \quad T_2 = 5\pi, \quad T_3 = 4 \quad T_4 = \frac{2\pi}{0.68} \approx 3\pi \\
t_{\mathrm{sim}} &= 25\pi \\
\Delta t &= 0.33
\end{aligned}$$

2.3 Stationäre Zustände:

$$
\begin{aligned}
0 &= a(y-x)\\
0 &= xb - xz - y\\
0 &= xy - cz\\
\Rightarrow x &= y\\
\Rightarrow 0 &= x(b-z-1)\\
\Rightarrow z &= \frac{x^2}{c}\\
\Rightarrow 0 &= x(cb-c-x^2) \Rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{c(b-1)} = \pm 6\sqrt{2}\\
\Rightarrow x_1 &= y_1 = z_1 = 0\\
\Rightarrow x_{2,3} &= y_{2,3} = \pm 6\sqrt{2}, z_{2,3} = 27
\end{aligned}
$$

Jacobi-Matrix (Matlab):

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b-z & -1 & -x \\ y & x & -c \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda + a & -a & 0 \\ -b+z & \lambda+1 & x \\ -y & -x & \lambda + c \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow 0 = \lambda^3 + \lambda^2(a+c) + \lambda(a + cx^2 - ab + ac + az) + ax^2 - abc + acz + axy + ac\\
&x_1 = y_1 = z_1 = 0 \Rightarrow \lambda^3 + \frac{41\lambda^2}{3} - \frac{722\lambda}{3} - 720 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{8}{3}, \lambda_2 = -22.8277, \lambda_3 = 11.8277\\
&x_{2,3} = y_{2,3} = \pm 6\sqrt{2}, z_{2,3} = 27 \Rightarrow \lambda^3 + \frac{41\lambda^2}{3} + \frac{304\lambda}{3} + 1440\\
&\Rightarrow \lambda_{4,5} = 0.0940 \pm 10.1945\mathrm{j}, \lambda_6 = -13.8546\\
&t_{\mathrm{sim}} = 54, \Delta t = 0.0044
\end{aligned}
$$

Lösung 3:. Konstruktion eines impliziten Runge-Kutta 2. Ordnung

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & a_{11} & a_{12} \\
c & a_{21} & a_{22} \\
\hline
 & w_1 & w_2
\end{array}
$$

$w_1 + w_2 = 1, a_{11} + a_{12} = 0, a_{11} = a_1, a_{12} = -a_1, c = a_{21} + a_{22}$

mit $f = f(x_k, t_k)$, Entwicklung der Taylor-Reihen bis $h^2 \Rightarrow K_i$ nur bis h^1 und K_i als Funktionswert nur bis h^0:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= f\big(x_k + \underbrace{h\left(a_1 K_1 - a_1 K_2\right)}_{\Delta x}, t_k \underbrace{}_{\Delta t=0}\big) \\
&\approx f + h\left(f_x \cdot \left(a_1 K_1 - a_1 K_2\right)\right) && \text{Taylor-Reihe } f(x_k + \Delta x, t_k) = f + f_x \Delta x \\
&\approx f + h f_x \left(a_1 f - a_1 f\right) && \text{Taylor-Reihe } K_1 = f,\, K_2 = f \\
&\approx f \\
K_2 &= f(x_k + \underbrace{h\left(a_{21} K_1 + a_{22} K_2\right)}_{\Delta x}, t_k + \underbrace{hc}_{\Delta t}) \\
&\approx f + f_x h\left(a_{21} K_1 + a_{22} K_2\right) + f_t hc && \text{Taylor-Reihe } f(x_k + \Delta x, t_k + hc) = f + f_x \Delta x + f_t \Delta t \\
&\approx f + h f_x \left(a_{21} f + a_{22} f\right) + f_t hc && \text{Taylor-Reihe } K_1 = f,\, K_2 = f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + h(w_1 K_1 + w_2 K_2) \\
&\approx x_k + h(w_1 f + w_2 \left(f + h f_x f\left(a_{21} + a_{22}\right) + f_t hc\right) \\
&\approx x_k + h(w_1 + w_2) f + h^2 w_2 \left(f_x f\left(a_{21} + a_{22}\right) + f_t c\right)
\end{aligned}
$$

Bestimmungsgleichungen aus Vergleich mit exakter Taylor-Reihe:

$$w_1 + w_2 = 1, w_2(a_{21} + a_{22}) = \frac{1}{2}, w_2 c = \frac{1}{2}$$

mögliche Lösungen:

$$
\begin{aligned}
&w_1 = w_2 = \frac{1}{2} \\
&a_{21} = a_{22} = \frac{1}{2} \\
&a_1 = c = 1 \\
&\Rightarrow a_{11} = 1, a_{12} = -1
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
0 & 1 & -1 \\
1 & 1/2 & 1/2 \\
\hline
 & 1/2 & 1/2
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&w_1 = 0, w_2 = 1 \\
&a_{21} = a_{22} = \frac{1}{4} \\
&a_1 = 1 \\
&\Rightarrow a_{11} = 1, a_{12} = -1 \\
&c = \frac{1}{2}
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
0 & 1 & -1 \\
1 & 1/4 & 1/4 \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&w_1 = \frac{1}{4}, w_2 = \frac{3}{4} \\
&a_{21} = a_{22} = \frac{1}{3} \\
&a_1 = 1 \\
&\Rightarrow a_{11} = 1, a_{12} = -1 \\
&c = \frac{2}{3}
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
0 & 1 & -1 \\
2/3 & 1/3 & 1/3 \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}
$$