Teil I.
Aufgaben

6 Übungen gewöhnliche Differentialgleichungen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 2016/11/02, 15:01:58 +01'00'

Aufgabe 1:. Reviewfragen

1.1 Was bedeutet *homogene* Differentialgleichung?

1.2 Was bedeutet Differentialgleichung *erster Ordnung*?

1.3 Wie lassen sich lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen?

1.4 Wie lässt sich eine zweite Lösung einer linearen DGL zweiter Orndung mit konstanten Koeffizienten finden, falls $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ gilt?

Aufgabe 2:.

Lösen Sie die folgenden inhomogenen Differentialgleichungen durch *Variation der Konstanten*.

2.1 $y' - y = x$, Hinweis: $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}(x+1) + C$

2.2 $\dot{y} + 2y = \sin t$, Hinweis: $\displaystyle\int \mathrm{e}^{at}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{at}\,(a\sin t - \cos t)}{a^2+1} + C$

2.3 $y' - xy = x$, Hinweise: Homogene Lösung durch Trennung der Variablen,

$$\int x\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x^2/2} + C$$

Aufgabe 3:.

Lösen Sie die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) - x(t) = t$ zur Anfangsbedingung $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$.

Teil II. Lösungen

Lösung 1:. Reviewfragen

3.1 Rechte Seite = 0

3.2 Es kommt die gesuchte Funktion sowie ihre erste Ableitung in der Gleichung vor.

3.3 Lösung der homogenen DGL mit dem Ansatz $y = Ae^{Bx}$, partikuläre Lösung für inhomogen Teil suchen. Die Lösungen für den homogenen und den inhomogenen Teil lassen sich dann linear kombinieren.

3.4 $x(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t}$

Lösung 2:.

3.1 Homogene Lösung mit dem Ansatz $y = Ke^{\lambda x} \Rightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \Rightarrow y_\mathrm{h} = Ke^x$, Variation der Konstanten: $y = K(x)e^x$ in die DGL einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} K'(x)e^x &= x \\ \Leftrightarrow K'(x) &= xe^{-x} \\ \Rightarrow K(x) &= -e^{-x}(x+1) + C \\ y &= -(x+1) + Ce^x \end{aligned}$$

3.2 Homogene Lösung mit dem Ansatz $y = Ke^{\lambda t} \Rightarrow \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \Rightarrow y_\mathrm{h} = Ke^{-2t}$, Variation der Konstanten: $y = K(t)e^{-2t}$ in die DGL einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \dot{K}(t)e^{-2t} &= \sin t \\ \Leftrightarrow \dot{K}(t) &= e^{2t} \sin t \\ \Rightarrow K(t) &= \frac{e^{2t}\ (2\sin t - \cos t)}{5} + C \\ y &= Ce^{-2t} + \frac{1}{5}(2\sin t - \cos t) \end{aligned}$$

3.3 Homogene Lösung durch Trennung der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = x\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + C$$
$$\Rightarrow y = \mathrm{e}^{x^2/2 + C} = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \underbrace{\mathrm{e}^C}_{=K}$$
$$\Rightarrow y_\mathrm{h} = K\mathrm{e}^{x^2/2}$$

Variation der Konstanten: $y = K(x)\mathrm{e}^{x^2/2}$ in die DGL einsetzen ergibt

$$K'(x)\mathrm{e}^{x^2/2} = x$$
$$\Leftrightarrow K'(x) = x\mathrm{e}^{-x^2/2}$$
$$\Rightarrow K(x) = -\mathrm{e}^{-x^2/2} + C$$
$$\Rightarrow y = C\mathrm{e}^{x^2/2} - 1$$

Lösung 3:.

- Lösung der homogenen DGL $\ddot{x} - x = 0$ mit dem Ansatz $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$:

$$\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$
$$\Rightarrow x_\mathrm{h}(t) = A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t}$$

Ansatz zur Lösung der inhomogenen DGL: $x(t) = Ct + D$

$$\Rightarrow -Ct + D = t \Rightarrow C = -1, D = 0$$
$$x_\mathrm{p}(t) = -t$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t} - t$$

Anfangsbedingungen einsetzen:

$$\begin{cases} 1 = & A\mathrm{e}^0 + B\mathrm{e}^0 - 0 \\ 2 = & A\mathrm{e}^0 - B\mathrm{e}^0 - 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 2 = & 2A - 1 \\ 1 - 2 = & 2B + 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow A = 2, \quad B = -1$$
$$x(t) = 2\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} - t$$