Teil I.
Aufgaben

④ Mehrdimensionale Integrale

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 20. September 2016, 10:31

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit `http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/` or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Aufgabe 1:. Reviewfragen

1.1 Was bedeutet geometrisch das Doppelintegral einer Funktion $f(x, y)$?

1.2 Was ist der Trick, um mit Hilfe eines Doppelintegrals einen Flächeninhalt A in der x, y-Ebene zu berechnen?

1.3 Was ist der Trick, um mit Hilfe eines Dreifachintegrals ein Volumen V zu berechnen?

Aufgabe 2:. Mehrfachintegrale

Berechnen Sie folgende Mehrfachintegrale:

2.1 $I = \int_0^1 \int_1^2 xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

2.2 $I = \int_{-1}^1 \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{x}{y} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

2.3 $I = \int_{-1}^1 \int_x^{x+1} (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

2.4 $I = \int_1^2 \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (\sqrt{x} + 2y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

2.5 $I = \int_0^1 \int_{-x}^x \int_0^{x+y} 6z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

2.6 $I = \int_1^2 \int_0^{\frac{1}{x}} \int_1^{\mathrm{e}^{x+y}} \frac{xy}{z} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

Aufgabe 3:. Anwendungen

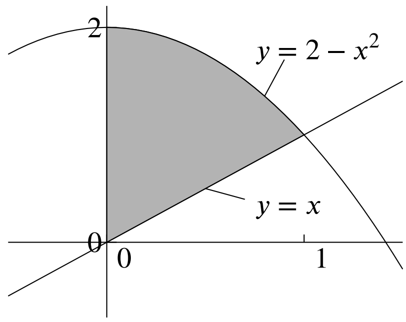
3.1 Bestimmen Sie die Fläche $A = \iint_{(A)} \mathrm{d}A$ und ihren Flächenschwerpunkt

$$x_\mathrm{s} = \frac{1}{A} \iint_{(A)} x \,\mathrm{d}A, \; y_\mathrm{s} = \frac{1}{A} \iint_{(A)} y \,\mathrm{d}A$$

zwischen den Kurven $y = x$ und $y = x^2$.

3.2 Bestimmen Sie die Fläche $A = \iint_{(A)} \mathrm{d}A$, die durch $y = x$, $y = \frac{1}{8}x$ und $\frac{1}{x^2}$, mit $x \geq 0$, eingeschlossen wird.

3.3 Welches Volumen hat ein Zylinder, der durch die skizzierte Bodenfläche und oben durch $z = 6 - x + y$ begrenzt wird?



Teil II.
Lösungen

Lösung 1:. Reviewfragen

1.1 Vorzeichenbehaftetes Volumen unter der Fläche.

1.2 Man setzt $z = f(x, y) = 1$, so dass $V = 1 \cdot A = \iint_{(A)} 1 \;\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ gilt.

1.3 Man setzt $f(x, y, z) = 1$, so dass $V = 1 \cdot \iiint_{(V)} 1 \;\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ gilt.

Lösung 2:. Mehrfachintegrale

2.1

$$\int_0^1 \int_1^2 xy \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{3}{2}x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

2.2

$$\int_{-1}^1 \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{x}{y} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 [x \ln y]_1^{\mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

2.3

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \int_x^{x+1} (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right]_x^{x+1} \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left(2x^2 + x + \frac{1}{3}\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x\right]_{-1}^1 = 2\end{aligned}$$

2.4

$$\int_1^2 \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (\sqrt{x} + 2y) \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[y\sqrt{x} + y^2\right]_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int_1^2 4x \,\mathrm{d}x = \left[2x^2\right]_1^2 = 6$$

2.5

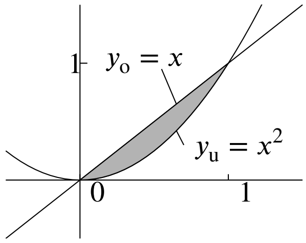
$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{-x} \int_0^{x+y} 6z \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_{-x} \left[3z^2\right]_0^{x+y} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{-x} \left(3x^2 + 6xy + 3y^2\right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left[3x^2 y + 3xy^2 + y^3\right]_{-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 8x^3 \,\mathrm{d}x = \left[2x^4\right]_0^1 = 2\end{aligned}$$

2.6

$$\int_1^2 \int_0^{\frac{1}{x}} \int_1^{e^{x+y}} \frac{xy}{z}\, dz\, dy\, dx = \int_1^2 \int_0^{\frac{1}{x}} [xy \ln z]_1^{e^{x+y}}\, dy\, dx = \int_1^2 \int_0^{\frac{1}{x}} \left(x^2 y + xy^2\right)\, dy\, dx$$
$$= \int_1^2 \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3x^2}\right) dx$$
$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{3x}\right]_1^2 = \frac{2}{3}$$

Lösung 3:. Anwendungen

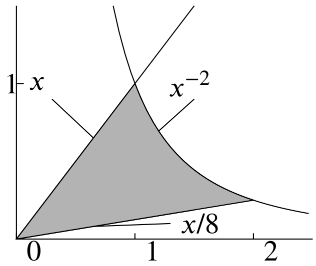
3.1 Schnittpunkte $x_u = 0$ und $x_o = 1$.



$$A = \iint_{(A)} dA = \int_0^1 \int_{y_u = x^2}^{y_o = x} dy\, dx = \int_0^1 [y]_{x^2}\, dx$$
$$= \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$x_s = \frac{1}{A} \iint_{(A)} x\, dA = 6 \int_0^1 \int_{y_u = 6x^2}^{y_o = x} x\, dy\, dx = 6 \int_0^1 [xy]_{x^2}\, dx$$
$$= 6 \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx = 6 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$
$$= 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} = 0.5$$
$$y_s = \frac{1}{A} \iint_{(A)} y\, dA = 6 \int_0^1 \int_{y_u = 6x^2}^{y_o = x} y\, dy\, dx = 6 \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2} dx$$
$$= 3 \int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) dx = 3 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$
$$= 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5} = 0.4$$

3.2 Schnittpunkte: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_{(A)} \mathrm{d}A = \int_0^1 \int_{x/8}^{x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_{x/4}^{x^{-2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 [y]_{x/8}^{x}\ \mathrm{d}x + \int_1^2 [y]_{x/8}^{x^{-2}}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x - \frac{x}{8}\right)\ \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{8}\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\left(1-\frac{1}{8}\right)\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{16}x^2\right]_1^2 \\
&= \frac{7}{16} + \frac{5}{16} = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$



3.3 Der Boden des Zylinders (grau unterlegte Fläche im Bild) ist Teil der x, y-Ebene $z = 0$, der Deckel Teil der Ebene $6-x-y$. Der Integrationsbereich in der x, y-Ebene wird *unten* durch die Gerade $y = x$, *links* durch $x = 0$ und *oben* durch die Parabel $2 - x^2$ berandet, wobei sich die x-Werte zwischen $x = 0$ und $x = 1$ bewegen (*Schnittstelle* der beiden Kurven für $x \geq 0$, berechnet aus $2 - x^2 = x$). Damit ergeben sich folgende *Integrationsgrenzen*:

z-Integration: von $z = 0$ bis $z = 6 - x - y$

y-Integration: von $y = x$ bis $y = 2 - x^2$

x-Integration: von $x = 0$ bis $x = 1$

Das Volumenintegral lautet dann:

$$V = \iiint_{(V)} \mathrm{d}V = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{2-x^2} \int_{z=0}^{6-x^2-y^2} 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int_{z=0}^{6-x-y} 1\,\mathrm{d}z = [z]_{z=0}^{6-x-y} = 6 - x - y$$

2. Integrationsschritt (Integration nach y)

$$\int_{y=x}^{2-x^2} (6-x-y)\ \mathrm{d}y = \left[6y - yx - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=x}^{2-x^2} = -\frac{x^4}{2} + x^3 - \frac{5\,x^2}{2} - 8\,x + 10$$

3. Integrationsschritt (Integration nach x)

$$V = \int_{x=0}^{1} \left(-\frac{x^4}{2} + x^3 - \frac{5\,x^2}{2} - 8\,x + 10 \right) \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^5}{10} + \frac{x^4}{4} - \frac{5\,x^3}{6} - 4\,x^2 + 10\,x \right]_{x=0}^{1}$$
$$= \frac{319}{60}$$

Volumen: $V = \dfrac{319}{60}$