Teil I.
Aufgaben

② Aufgaben zur Anwendung der partiellen Ableitung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 2016/09/06, 16:02:29 +02'00'

Aufgabe 1:. Reviewfragen

1.1 Welche geometrische Form hat die lineare Näherung einer Funktion zweier Veränderlicher?

1.2 Was ist das totale Differential von $f(x_1, x_2, x_3)$?

1.3 Wie hängen das totale Differential und die lineare Fehlerfortpflanzung zusammen?

1.4 Wie lässt sich die Steigung y' einer impliziten Kurve, zum Beispiel $x^2y^2\mathrm{e}^{x+y} = 1$, berechnen?

1.5 Wie hängen das totale Differential und die implizite Ableitung zusammen?

1.6 Wie hängen das totale Differential und die allgemeine Kettenregel zusammen?

Aufgabe 2:. Tangentialebene, Lineare Näherung

2.1.

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle S in der Form

$$z_\mathrm{T} = ax + by + c$$

2.1.1 $z = (x + y)\mathrm{e}^{x-y}$, $S = (1, 1)$

2.1.2 $z = xy\cos(\pi(2x - y))$, $S = (1, -1)$

2.2.

Schätzen Sie folgende Funktionswerte f durch lineare Näherung an der Stelle S:

2.2.1 $f = 1.1 \cdot \mathrm{e}^{-0.1}$, $S = (1, 0)$

2.2.2 $f = \left(\frac{47}{48}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{9}$, $S = (1, 8)$

Aufgabe 3:. Fehlerfortpflanzung

Bestimmen Sie den möglichen Bereich des indirekten Messwerts $z = f(x, y)$ für die angegebenen Mittelwerte $\bar{x}$, $\bar{y}$ und Messunsicherheiten Δx, Δy.

3.1 $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\bar{x} = 2$, $\Delta x = 0.1$, $\bar{y} = 3$, $\Delta y = 0.2$

3.2 $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $\bar{x} = 2.00$, $\Delta x = 0.10$, $\bar{y} = 0.50$, $\Delta y = 0.01$

Aufgabe 4:. Implizite Ableitung

4.1 Bestimmen Sie alle Stellen S, an denen die Kurve mit der impliziten Darstellung

$$x^2 + y^2 + x + y = \frac{7}{4}$$

horizontale oder vertikale Tangenten besitzt.

4.2 An welchen Stellen S besitzt die Kurve mit der impliziten Darstellung

$$xy + x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$$

die Steigung $y' = 1$?

Zusatzaufgabe: Plotten Sie die Kurven in MATLAB® `MuPAD` mit dem Befehl
`plot(plot::Implicit2d(...))`

Aufgabe 5:. Allgemeine Kettenregel

Differenzieren Sie die jeweilige Funktion $z = f(x, y)$ mit $x = x(t)$, $y = y(t)$ mit Hilfe der verallgemeinerten Kettenregel:

5.1 $z = \sin(xy)$ mit $x = \ln t$, $y = t$

5.2 $z = x\mathrm{e}^y$ mit $x = \sin t$, $y = t^3$

5.3 $z = \ln(xy)$, mit $x = \sin t$, $y = \cos(t)$

Teil II.
Lösungen

Lösung 1:. Reviewfragen

1.1 Tangentialebene

1.2 $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\,\mathrm{d}x_3$

1.3 Die lineare Fehlerfortpflanzung *ist* das totale Differential an der entsprechenden Stelle.

1.4 Mit Hilfe der impliziten Ableitung.

1.5 Die implizite Ableitung wird mit Hilfe des totalen Differentials hergeleitet, siehe Lücke 2.11 im Skript.

1.6 Die allgemeine Kettenregel ist das totale Differential geteilt durch $\mathrm{d}t$.

Lösung 2:. Tangentialebene, Lineare Näherung

2.1.1 $z = 3x - y$

2.1.2 $z = x - y - 1$

2.2.1 $f(x, y) = x\mathrm{e}^y$, Tangentialebene $z = x + y$, Schätzwert $z(1.1, -0.1) = 1$

2.2.2 $f(x, y) = x^2\sqrt[3]{y}$, Tangentialebene $z = 4x + \frac{y}{12} - \frac{8}{3}$, $z\left(\frac{47}{48}, 9\right) = 2$

Lösung 3:. Fehlerfortpflanzung

3.1 $f_x = 2x, f_y = 2y, \bar{z} = 2.0^2 + 3.0^2 = 13.0$
$\Delta z_{\max} = |2 \cdot 2.0 \cdot 0.1| + |2 \cdot 3.0 \cdot 0.2| = 0.4 + 1.2 = 1.6$
$\Rightarrow z = \bar{z} \pm \Delta z_{\max} = 13.0 \pm 1.6$

3.2 $f_x = \frac{1}{y}, f_y = -\frac{x}{y^2}, \bar{z} = \frac{2.00}{0.50} = 4.00$
$\Delta z_{\max} = \left|\frac{1}{0.50} \cdot 0.10\right| + \left|-\frac{2.00}{0.50^2} \cdot 0.01\right| = 0.20 + 0.08 = 0.28$
$\Rightarrow z = \bar{z} \pm \Delta z_{\max} = 4.00 \pm 0.28$

Lösung 4:. Implizite Ableitung

4.1 $F(x, y) = x^2 + x + y^2 + y - \frac{7}{4} = 0,\ y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2\,x+1}{2\,y+1},$
horizontal Tangenten:

$$F_x = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_\mathrm{h} = -\frac{1}{2}$$
$$F(x_\mathrm{h}, y) = 0 \Rightarrow y_{\mathrm{h}1} = -2, y_{\mathrm{h}2} = 1$$
$$S_1 = (-\frac{1}{2}, -2), \quad S_2 = (-\frac{1}{2}, 1)$$

vertikale Tangenten:

$$F_y = 2y + 1 = 0 \Rightarrow y_\mathrm{h} = -\frac{1}{2}$$
$$F(x, y_\mathrm{h}) = 0 \Rightarrow x_{\mathrm{h}1} = -2, x_{\mathrm{h}2} = 1$$
$$S_1 = (-2, -\frac{1}{2}), \quad S_2 = (1, -\frac{1}{2})$$

4.2

$$F(x, y) = xy + x^2 + y^2 - \frac{1}{3}, y' = -\frac{2\,x+y}{x+2\,y} \overset{!}{=} 1$$
$$\Rightarrow x = -y, F(-y, y) = 0 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \mp\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$S_1 = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), S_2 = (+\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$$

Lösung 5:. Allgemeine Kettenregel

5.1 $\dot{z} = z_x\dot{x} + z_y\dot{y} = y\ \cos(x\ y)\ \frac{1}{t} + x\ \cos(x\ y) \cdot 1 = \cos\,(t\ \ln t)\ (\ln t + 1)$

5.2 $\dot{z} = z_x\dot{x} + z_y\dot{y} = \mathrm{e}^y \cos t + x\mathrm{e}^y 3t^2 = \mathrm{e}^{\left(t^3\right)} \left(\cos t + 3t^2 \sin t\right)$

5.3 $\dot{z} = z_x\dot{x} + z_y\dot{y} = \frac{1}{x}\cos(t) - \frac{1}{y}\sin t = \frac{\cos(t)^2 - \sin(t)^2}{\cos(t)\ \sin(t)}$