# Teil I
# Aufgaben

# ① Aufgaben zu Funktionen mehrerer Variablen, partielle Ableitung

**Zoltán Zomotor**

**Versionsstand: 2016/09/06, 15:51:03 +02'00'**



### Aufgabe 1: Reviewfragen

1.1 Wie heißt die Menge aller tatsächlich vorkommenden Werte $f(\boldsymbol{x})$?

1.2 Wie lässt sich anschaulich die partielle Ableitung beschreiben und wie wird sie gebildet?

1.3 Was ist der Gradient einer Funktion?

1.4 Wie hängen Gradient und Höhenlinien zusammen?

1.5 Unter welchen (in dieser Vorlesung meistens gegebenen) Voraussetzungen lassen sich die partiellen Ableitungen bei mehrfachem Ableiten vertauschen?

### Aufgabe 2: Definitionsbereich

#### 2.1 Bestimmen und skizzieren Sie den Definitionsbereich folgender Funktionen:

2.1.1 $z = \sqrt{xy - y}$

2.1.2 $z = \sqrt{(4 - x^2)(9 - y^2)}$

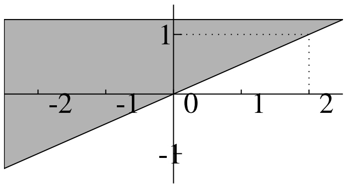
2.1.3 $z = \arcsin(x^2 + y^2 - 1)$

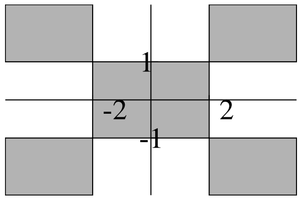
2.1.4 $z = \dfrac{\sqrt{x - y}}{x + 1}$

2.1.5 $z = \ln(x^2 - y^2)$

2.1.6 $z = \dfrac{1}{xy^2 + x^2y}$

### 2.2 Bestimmen Sie jeweils eine Funktion, die den grauen Definitionsbereich besitzt.

2.2.1 


2.2.2 


### Aufgabe 3: Partielle Differentiation

### 3.1 Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung folgender Funktionen:

3.1.1 $z(x, y) = -(2\,y - a\,x)^3$

3.1.2 $w(u, v) = \cos(v)\ \sin(u)$

3.1.3 $z(x, y) = -\dfrac{y - (x-1)^2}{x\,y}$

3.1.4 $z(r, \phi) = r^2\,\mathrm{e}^{r\,\phi}$

3.1.5 $z(x, y) = \sqrt{x\,y - x^2\,y^2}$

3.1.6 $z(x, y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$

3.1.7 $u(x, t) = -\dfrac{t\,x}{t - x}$

3.1.8 $z(t, \phi) = t\ \sin(t + \phi)$

3.1.9 $x^y$

3.1.10 $z(x, y) = (x\,y)^{x\,y}$ (nur die Ableitungen 1. Ordnung berechnen)

### 3.2 Welchen Anstieg besitzt die Bildfläche von

$$z(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2\,y^2}\ \ln(x\,y)$$

an der Stelle $x = y = 1$?

# Teil II Lösungen

## Lösung 1: Reviewfragen

1.1 Bild der Funktion

1.2 Die partielle Ableitung ist die Ableitung entlang einer Koordinatenachse. Hierzu behandelt man alle Unabhängige als Konstante - bis auf einen einzige Unbekannte - und leitet ganz normal nach dieser einen ab.

1.3 Vektor der partiellen Ableitungen, der in Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion zeigt.

1.4 Gradient und Höhenlinien stehen senkrecht aufeinander.

1.5 Die Funktion ist total differenzierbar, das heißt, in einer Umgebung einer Stelle existieren alle partiellen Ableitungen und sind stetig.

## Lösung 2: Definitionsbereich

2.1.1 $xy - y \geq 0 \Leftrightarrow y(x-1) \geq 0 \Rightarrow y \geq 0, x \geq 1$ oder $y \leq 0, x \leq 1$

2.1.2 $(4-x^2)(9-y^2) \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 2, |y| \leq 3$ oder $|x| \geq 2, |y| \geq 3$

2.1.3 $\left|x^2 + y^2 - 1\right| \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2$

2.1.4 $x + 1 \neq 0$ und $x - y \geq 0 \Rightarrow x \neq -1, x \geq y$

2.1.5 $x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow |x| > |y|$

2.1.6 $xy^2 + x^2y \neq 0 \Rightarrow x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y \neq -x$

2.2.1 $y \geq \frac{x}{2}$, z.B. $z = \sqrt{y - \frac{x}{2}}$

2.2.2 $(|x| \leq 2, |y| \leq 1) \cup (|x| \geq 2, |y| \geq 1)$, z.B. $\sqrt{(x^2-4)(y^2-1)}$

## Lösung 3: Partielle Differentiation

3.1.1 $z_x = 3\,a\,(2\,y - a\,x)^2$, $z_y = -6\,(2\,y - a\,x)^2$, $z_{xx} = -6\,a^2\,(2\,y - a\,x)$, $z_{yy} = 24\,a\,x - 48\,y$, $z_{xy} = z_{yx} = 12\,a\,(2\,y - a\,x)$

3.1.2 $w_u = \cos(u)\,\cos(v)$, $w_v = -\sin(u)\,\sin(v)$, $w_{uu} = -\cos(v)\,\sin(u)$, $w_{vv} = -\cos(v)\,\sin(u)$, $w_{uv} = w_{vu} = -\cos(u)\,\sin(v)$

3.1.3 $z_x = \frac{x^2 + y - 1}{x^2\,y}$, $z_y = -\frac{x^2 - 2\,x + 1}{x\,y^2}$, $z_{xx} = -\frac{2\,(y-1)}{x^3\,y}$, $z_{yy} = \frac{2\,\left(x^2 - 2\,x + 1\right)}{x\,y^3}$, $z_{xy} = z_{yx} = -\frac{x^2 - 1}{x^2\,y^2}$

3.1.4 $z_r = r\,\mathrm{e}^{r\varphi}\,(r\varphi+2)$, $z_v = r^3\,\mathrm{e}^{r\varphi}$, $z_{rr} = \mathrm{e}^{r\varphi}\,\left(r^2\varphi^2+4\,r\varphi+2\right)$, $z_{vv} = r^4\,\mathrm{e}^{r\varphi}$, $z_{rv} = z_{vr} = r^2\,\mathrm{e}^{r\varphi}\,(r\varphi+3)$

3.1.5 $z_x = \dfrac{y-2\,x\,y^2}{2\,\sqrt{-x\,y\,(x\,y-1)}}$, $z_y = \dfrac{x-2\,x^2\,y}{2\,\sqrt{-x\,y\,(x\,y-1)}}$, $z_{xx} = -\dfrac{y^2}{4\,(-x\,y\,(x\,y-1))^{\frac{3}{2}}}$, $z_{yy} = \dfrac{x}{4\,y\,(x\,y-1)\,\sqrt{-x\,y\,(x\,y-}}$

$z_{xy} = z_{yx} = -\dfrac{4\,x^2\,y^2-6\,x\,y+1}{4\,(x\,y-1)\,\sqrt{-x\,y\,(x\,y-1)}}$

3.1.6 $z_x = 2\,x\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$, $z_y = 2\,y\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$, $z_{xx} = 2\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\left(2\,x^2+1\right)$, $z_{yy} = 2\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\left(2\,y^2+1\right)$, $z_{xy} = z_{yx} = 4\,x\,y\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$

3.1.7 $u_x = -\dfrac{t^2}{(t-x)^2}$, $u_t = \dfrac{x^2}{(t-x)^2}$, $u_{xx} = -\dfrac{2\,t^2}{(t-x)^3}$, $u_{tt} = -\dfrac{2\,x^2}{(t-x)^3}$, $u_{xt} = u_{tx} = \dfrac{2\,t\,x}{(t-x)^3}$

3.1.8 $z_t = \sin(t+\phi) + t\,\cos(t+\phi)$, $z_\phi = t\,\cos(t+\phi)$, $z_{tt} = 2\,\cos(t+\phi) - t\,\sin(t+\phi)$, $z_{\phi\phi} = -t\,\sin(t+\phi)$, $z_{t\phi} = z_{\phi t} = \cos(t+\phi) - t\,\sin(t+\phi)$

3.1.9 $z_x = x^{y-1}\,y$, $z_y = x^y\ln(x)$, $z_{xx} = x^{y-2}\,y\,(y-1)$, $z_{yy} = x^y\ln(x)^2$, $z_{xy} = z_{yx} = x^{y-1}\,(y\ln(x)+1)$

3.1.10 $z_x = y\,(\ln(x\,y)+1)\,(x\,y)^{x\,y}$, $z_y = x\,(\ln(x\,y)+1)\,(x\,y)^{x\,y}$,

$z_{xx} = \dfrac{y\,(x\,y)^{x\,y}\,\left(x\,y\ln(x\,y)^2+2\,x\,y\,\ln(x\,y)+x\,y+1\right)}{x}$,

$z_{yy} = \dfrac{x\,(x\,y)^{x\,y}\,\left(x\,y\ln(x\,y)^2+2\,x\,y\,\ln(x\,y)+x\,y+1\right)}{y}$,

$z_{xy} = z_{yx} = (x\,y)^{x\,y}\,\left(\ln(x\,y)+x\,y+2\,x\,y\,\ln(x\,y)+x\,y\ln(x\,y)^2+2\right)$

$$\nabla z(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2\,y^2}\,\left(2\,x^2\,y^2\,\ln(x\,y)-1\right)}{x} \\ -\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2\,y^2}\,\left(2\,x^2\,y^2\,\ln(x\,y)-1\right)}{y} \end{pmatrix}$$

$$\nabla z(1,1) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-1} \\ \mathrm{e}^{-1} \end{pmatrix}$$