(10) Lineare Differentialgleichungssysteme und Fundamentalmatrix*

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 5. September 2015, 18:27

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Transformation in ein DGL-System 1. Ordnung

In der Zustandsraummethode der Regelungstechnik und zur numerischen Lösung werden Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung in ein Differentialgleichungs*system* erster

*Dieses Skript basiert auf [Unb07, Seite 6ff]

Ordnung transformiert. Für ein lineares System zweiter Ordnung $m\ddot{y}(t) + d\dot{y}(t) + cy(t) = u(t)$ ergibt sich

1

Dieses Gleichungssystem lässt sich in Matrizenschreibweise darstellen:

2

Nichtlineare Differentialgleichungen 2. und höherer Ordnung müssen in der Form

$$y^{(n)}(t) + f\Big(y(t), \dot{y}(t)\ddot{y}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), u(t)\Big) = 0$$

vorliegen, damit sie in ein Differentialgleichungssysem 1. Ordnung transformiert werden können:

3

Numerische Integrationsverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen (zum Beispiel Runge-Kutta-Verfahren) verlangen häufig, dass die Differentialgleichungen als System 1. Ordnung vorliegen, so dass man zur numerischen Simulation ggf. das hier vorgestellte Verfahren zur Transformation anwenden muss. Im Folgenden wird es hier nur noch um lineare Differentialgleichungen gehen.

2 Lösung im Zeitbereich

Betrachten wir zunächst ein skalares System 1. Ordnung

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \text{ mit } x(0) = x_0$$

Durch Laplace-Transformation erhalten wir die Lösung im Bildbereich:

4

Die Rücktransformation in den Zeitbereich liefert unmittelbar die Lösung

5

Für den vektoriellen Fall ist es naheliegend, die gleiche Struktur der Lösungsgleichung anzusetzen und die skalaren Größen durch Vektoren oder Matrizen zu ersetzen. Dies führt rein formal auf die Beziehung

6

Dabei ergibt sich allerdings die Schwierigkeit der Definition der Matrix-Exponentialfunktion $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$. Sie muss in Analogie zum skalaren Fall die Bedingung 7 erfüllen.

Sie lässt sich wie die skalare e-Funktion als Taylor-Entwicklkung darstellen:

8

Die Lösung wird auch in der Form

9

geschrieben, wobei die Matrix $\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ als *Fundamentalmatrix* bezeichnet wird. In den folgenden beiden Kapiteln werden zwei wesentlich elegantere Methoden als die Taylor-Reihe vorgestellt, um $\boldsymbol{\Phi}(t)$ zu berechnen.

3 Lösung im Bildbereich zur Bestimmung der Fundamentalmatrix

Die Laplace-Transformation der vektoriellen Darstellung in Lücke 2 ergibt

10

Wenn Sie die Ergebnisse in den Lücken 9 und 10 vergleichen folgt unmittelbar für die Fundamentalmatrix

11

Für Systeme 2. Ordnung mit einer Systemmatrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ lässt sich die Fundamentalmatrix dann folgendermaßen berechnen:

12

Beispiel: Gegeben sei die Systemmatrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Dann ergibt sich für die Fundamentalmatrix im Bildbereich

13

Die Rücktransformation in den Zeitbereich liefert schließlich

14

4 Berechnung der Fundamentalmatrix mit dem Satz von Cayley-Hamilton

Satz von Cayley-Hamilton:

> Jede quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ genügt ihrer charakteristischen Gleichung.

Ist demnach $P(s) = |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + s^n = 0$ das charakteristische Polynom von $\boldsymbol{A}$, so gilt

15

Mit dem Satz von Cayley-Hamilton lässt sich zeigen, dass jede $n \times n$ Matrizenfunktion $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$, und damit auch die Fundamentalmatrix (siehe Lücke 8), durch ein Polynom $(n-1)$-ter Ordnung darstellen lässt. Dieses Polynom gilt auch für die n Eigenwerte s_i der Matrix $\boldsymbol{A}$:

16

Damit ergeben sich für die n Eigenwerte s_i genau n Gleichungen, um die n unbekannten Koeffizienten $\alpha_j(t)$ in Lücke 16 zu berechnen. Dies ist also neben dem Verfahren im vorherigen Kapitel eine zweite Möglichkeit, die Fundamentalmatrix zu berechnen.[1]

[1] Es gibt mehr als neunzehn Methoden zur Berechnung von $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$, siehe [ML03]

Beispiel: Für die Systemmatrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

lautet die charakteristische Gleichung:

17

Es ergeben sich die Eigenwerte 18 . Nun machen wir den Ansatz aus Lücke 16:

19

Die Lösung des Gleichungssystems liefert die gesuchten, zeitabhängigen Koeffizienten:

20

Setzen wir die Koeffizienten in die erste Gleichung in 19 ein erhalten wir schließlich die Fundamentalmatrix:

21

5 Übungsaufgaben

Lösen Sie die Differentialgleichungssysteme in [Pap12, Seite 536ff, Zu Abschnitt 7] mit den hier behandelten Lösungsverfahren.

Literatur

[ML03] C. B. Moler und C. F. Van Loan. „Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later“. In: *SIAM Review 45*. Abrufbar unter `http://www.cs.cornell.edu/cv/researchpdf/19ways+.pdf`. 2003, S. 3–49.

[Pap12] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 13. Auflage. Bd. 2. Vieweg + Teubner, 2012.

[Unb07] Heinz Unbehauen. *Regelungstechnik II*. 9. Auflage. Vieweg Verlag, 2007.