

6 Vektoranalysis Kurven

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 20. August 2015, 19:39

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: <http://www.z5z6.de>



This work is based on the works of Jörn Loviscach <http://www.j317h.de> and licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

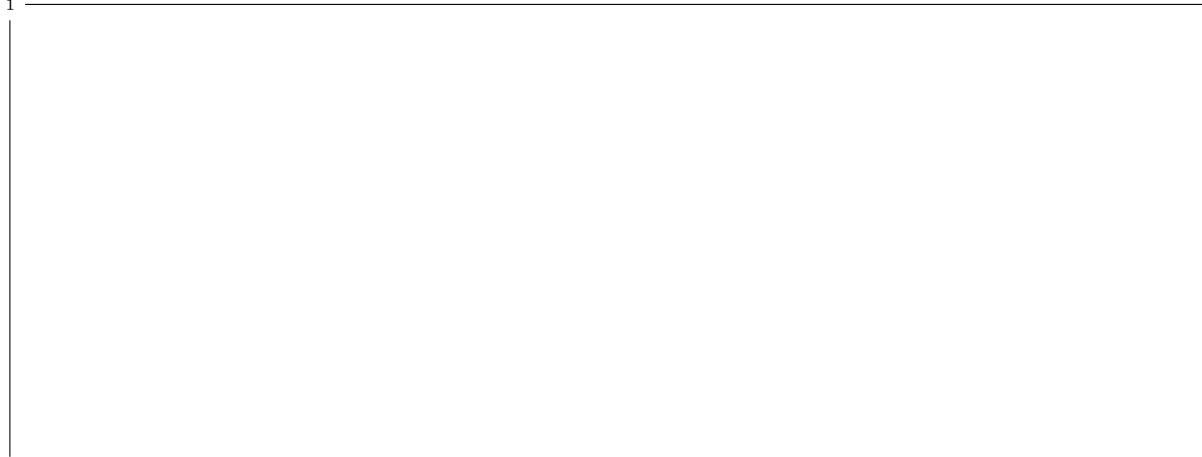
Nomenklatur	1
1 Vektorielle Darstellung von Kurven	2
1.1 Zeitableitung, Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor	2
1.2 Bogenlänge	3
1.3 Krümmung	3
1.4 Anwendungsbeispiel: Tangential- und Normalkomponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung	5
2 Kurven- oder Linienintegrale	5
3 Übungsaufgaben	6

Nomenklatur

Im Druck sind Vektoren klein und fett \mathbf{a} und Matrizen groß und fett \mathbf{A} geschrieben. Handschriftlich werden Vektoren und Matrizen durch einen Unterstrich gekennzeichnet: \underline{a} , \underline{A}

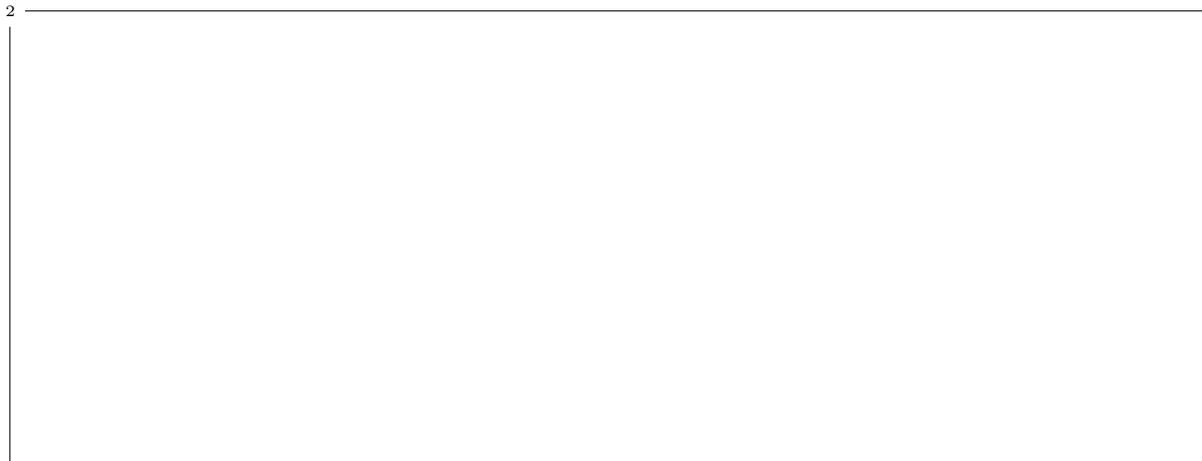
1 Vektorielle Darstellung von Kurven

Bewegungsabläufe, wie zum Beispiel die zwei- oder dreidimensionale Bewegung eines Körpers, lassen sich am besten vektoriell darstellen. Die Raumkoordinaten x , y und z sind dabei abhängig von einem gemeinsamen Parameter. Die Parametergröße ist häufig die Zeit t (bei kreisförmigen Bewegungen bietet sich auch ein Winkel φ an). Beispiel schiefer Wurf:



1.1 Zeitableitung, Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor

Die Zeitableitung¹ eines Vektors \mathbf{r} ist ein Tangentenvektor $\dot{\mathbf{r}}$:



Für den Tangenteneinheitsvektor \mathbf{e}_T gilt dann

Der Hauptnormaleneinheitsvektor \mathbf{e}_N lässt sich mit Hilfe der Ableitung des Skalarprodukts $\mathbf{e}_T \cdot \mathbf{e}_T$ bestimmen:

3

¹Summen-, Produkt- und Kettenregel gelten analog auch für die Ableitung von Vektoren.

4

1.2 Bogenlänge

Die Bogenlänge s einer Kurve lässt sich mit Hilfe des Zusammenhangs $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ leicht herleiten:

5

Aufgabe: Leiten Sie die Bogenlänge einer ebenen Kurve mit $y = f(x)$ und $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ her:

6

1.3 Krümmung

Die *Krümmung* κ einer Kurve ist definiert als die Änderung des Tangenteneinheitsvektors \mathbf{e}_T in Abhängigkeit von der Bogenlänge s :

7

Für einen zeitabhängigen² Vektor $\mathbf{r}(t)$ lässt sich eine einfache Formel für die Krümmung \varkappa aus dem Kreuzprodukt $\mathbf{e}_T \times \mathbf{e}'_T$ herleiten:

8

Aufgabe: Leiten Sie die Krümmung \varkappa für die ebene Kurve $y = f(x)$ mit $\mathbf{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ her.

²Der Vektor kann auch von einem beliebigen anderen Parameter k abhängen, die Zeitableitung $\frac{d}{dt}$ ist dann durch die Ableitung $\frac{d}{dk}$ zu ersetzen.

9

1.4 Anwendungsbeispiel: Tangential- und Normalkomponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung

Ein Massepunkt bewege sich auf einer Bahn mit dem Ortsvektor \mathbf{r} . Für die Zerlegung des Geschwindigkeitsvektors gilt dann

10

Für den Beschleunigungsvektor gilt dann

11

2 Kurven- oder Linienintegrale

Ein Massepunkt wird durch ein Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ bewegt. Welche Arbeit ist dabei zu leisten oder wird dabei frei? Um das zu berechnen, ist entlang der Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ des Körpers „Kraft in

Wegrichtung mal Weg“ aufzusummieren:

12

Das lässt sich ausrechnen, indem man den konkreten Zeitverlauf der Bahn einsetzt:

13

Dies ist ein bestimmtes Integral in einer Dimension, wie man es kennt. Wenn das Kraftfeld nicht von der Zeit abhängt, ist es egal, welchen konkreten Zeitverlauf man zum Ausrechnen nimmt; Hauptsache, alle Punkte werden mindestens einmal angefahren. Für Kurvenintegrale über geschlossene Bahnen (das heißt Anfangspunkt = Endpunkt) schreibt man auch einen Kringel durch das Integralzeichen: \oint . Diese Integrale treten insbesondere bei der Berechnung von Induktionsspannungen auf. Der Pfad beschreibt dann keine Bewegung, sondern die Form des Leiters.

3 Übungsaufgaben

[Pap11, S.230ff]: alle Aufgaben zu Abschnitt 1

Literatur

[Pap11] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 6. Auflage. Bd. 3. Vieweg + Teubner, 2011.