⑤ Koordinatensysteme

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 6. August 2015, 21:43

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Polar-, Zylinder und Kugelkoordinaten

1.1 Motivation

Sachverhalte, die eine Struktur von Zeilen und Spalten zeigen, lassen sich in kartesischen (von René Descartes = Renatus Cartesius) Koordinaten anschaulich und übersichtlich beschreiben, zum Beispiel wird in der Physik die x-Achse häufig zur Darstellung der Zeit t als unabhängige Variable verwendet, während die y-Achse die zeitlich veränderliche Größe repräsentiert. Viele andere Sachverhalte sind aber kreis-, zylinder- oder kugelförmig:

1

Dafür sind die im Folgenden beschriebenen *krummlinigen* Koordinatensysteme besser als kartesische Koordinatensysteme geeignet!

1.2 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten kennen Sie schon von den komplexen Zahlen: Statt einen Punkt im $\mathbb{R}^2$ als (x, y) zu bestimmen, lässt sich auch sein Abstand r vom Ursprung und der Winkel „Azimut“ φ zur x-Achse angeben:

2

Achtung: Der Winkel φ ist mit Vorsicht zu genießen:

3

Entsprechendes gilt für die Winkel im Folgenden!
Umrechnung von polar nach kartesisch:

4

Umrechnung von kartesisch nach polar:

5

1.3 Zylinderkoordinaten

Zu den Polarkoordinaten in der xy-Ebene lässt sich die übliche z-Achse dazugeben und man hat damit ein Koordinatensystem für den $\mathbb{R}^3$, die Zylinderkoordinaten:

6

Umrechnung von zylindrisch in kartesisch:

7

Umrechnung von kartesisch nach zylindrisch:

8

Was „passiert“, wenn man in einer Funktion $z = f(x)$ die Koordinate x durch die Zylinderkoordinate r ersetzt? Das Ergebnis ist eine 9 .

Wichtig: Dies gilt auch für die implizite Darstellung $F(x, z) = 0$ (siehe [Pap12, S.341, Aufgabe 22]). Graphisch:

10

1.4 Kugelkoordinaten

Die Kugelkoordinaten = spärischen Koordinaten sind eine andere Erweiterung der Polarkoordinaten ins Dreidimensionale. Statt der kartesischen z-Koordinate kommt der Polwinkel = Zenitwinkel ϑ zur positiven z-Achse hinzu. Eine andere Möglichkeit ist, ϑ als Höhenwinkel = Elevation zur xy-Ebene zu messen; das wird zum Beispiel für das interne Koordinatensystem bestimmter Radarsensoren im Fahrzeug verwendet.

11

Der übliche Wertebereich von ϑ ist damit

12

Umrechnung von sphärisch nach kartesisch:

13

Umrechnung von kartesisch nach sphärisch:

14

2 Integration in Polarkoordinaten

Bei zum Beispiel kreisförmigen Funktionen ist es häufig einfacher, die Funktion f und den Integrationsbereich in Polarkoordinaten (r, φ) anzugeben und über r und φ statt über x und y zu integrieren. Die Integration lässt sich als Grenzfall einer Summe vorstellen: man summiert in kartesischen Koordinaten hohe oder tiefe Quader mit kleiner quadratischer Grundfläche $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ und Höhe $f(x, y)$. Bei Polarkoordinaten sind die Grundflächen dagegen kleine Sektoren von Kreisringen. Die Fläche eines solchen Stücks ist nicht $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$, sondern verlangt einen Korrekturfaktor:

15

So lässt sich zum Beispiel die Fläche der Kreisscheibe mit Radius R um den Ursprung bestimmen:

16

In Zylinderkoordinaten ist derselbe Korrekturfaktor nötig.

3 Integration in Kugelkoordinaten

Bei Integration über Kugelkoordinaten hat man es nicht mehr wie im kartesischen Fall mit Würfeln, sondern mit runden Stückchen zu tun. Das Volumen eines solchen Stücks ist nicht $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$, sondern verlangt einen Korrekturfaktor:

17

So lässt sich zum Beispiel das Volumen einer Kugel mit Radius R um den Ursprung bestimmen:

18

4 Übungsaufgaben

[Pap12, S.338ff, Aufgaben 4, 5, 6, 8, 12, 13, 16, 19 bis 25], [Pap10]: S.301ff, Kapitel F, alle Aufgaben im Unterkapitel *1.2 Doppelintegrale in Polarkoordinaten*, sowie die Aufgaben F40 bis F48 im Unterkapitel *2.2 Dreifachintegrale in Zylinderkoordinaten.*

Literatur

[Pap10] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 4. Auflage. Bd. Klausur und Übungsaufgaben. Vieweg + Teubner, 2010.

[Pap12] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 13. Auflage. Bd. 2. Vieweg + Teubner, 2012.