④ Mehrdimensionale Integrale

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 5. September 2015, 18:21

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Mehrdimensionale Integrale

Das bestimmte Integral einer Funktion *einer* Veränderlichen gibt die Fläche unter dem Funktionsgraphen an, samt Vorzeichen:

1

Entsprechend gibt das Integral einer Funktion *zweier* Veränderlicher das *Volumen* unter dem Funktionsgraphen an, samt Vorzeichen. Der Integrationsbereich ist nun eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$:

2

Anmerkung: Unbestimmte Integrale = Stammfunktionen betrachtet man praktisch nur bei Funktionen einer Veränderlichen. Deshalb sagt man bei mehrdimensionalen Integralen nicht ausdrücklich *bestimmtes* Integral.

Integrale von Funktionen dreier Veränderlicher haben eine entsprechende Bedeutung: Das vierdimensionale (Hyper-)Volumen unter einem dreidimensionalen Volumen im $\mathbb{R}^3$ ist allerdings nicht leicht darzustellen. Was man in der Anwendung häufig findet ist das Integral über drei Variablen im Sinne einer Summe oder eines Mittelwerts. Zum Beispiel könnte von einem Stoff eine ortsabhängige Dichte $\varrho(x, y, z)$ gegeben sein. Dann gilt für die Gesamtmasse M:

3

2 Berechnung kartesischer Mehrfachintegrale

Angenommen, die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ soll über das Dreieck zwischen den Punkten $(0|0)$, $(1|0)$ und $(0|1)$ integriert werden. Gesucht ist also das Volumen eines dreieckigen Tortenstücks unter dem Paraboloid:

4

Der übliche Trick besteht nun darin, den Integrationsbereich (das heißt das Dreieck) längs der x- oder der y-Achse in Salamischeiben zu schneiden, zum Beispiel so:

5

und dann das Mehrfachintegral in ein eindimensionales Integral eines eindimensionalen Integrals umzuwandeln, bei dem gegebenenfalls die Grenzen des inneren Integrals von der Variablen des äußeren Integrals abhängen.

6

Entsprechend bei Funktionen von drei und mehr Veränderlichen.

3 Anwendungen

Mehrfachintegrale lassen sich verwenden, um zum Beispiel folgende Größen zu berechnen:

- Flächeninhalt:

7

- Schwerpunkt einer Fläche:

8

- Flächenträgheitsmomente:

9

- Volumen eines Körpers:

10

- Schwerpunkt eines Körpers

11

4 Übungsaufgaben

[Pap12]: S.338ff, Aufgaben 1, 3, 7, 9, 10, 11, 14, 15 [Pap10]: S.301ff, Kapitel F, alle Aufgaben in den Unterkapiteln *1.1 Doppelintegrale in kartesischen Koordinaten* und *2.1 Dreifachintegrale in kartesischen Koordinaten.*

Literatur

[Pap10] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 4. Auflage. Bd. Klausur und Übungsaufgaben. Vieweg + Teubner, 2010.

[Pap12] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 13. Auflage. Bd. 2. Vieweg + Teubner, 2012.