⑥ Vektoranalysis Kurven

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 31. Juli 2014, 13:51

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur

Im Druck sind Vektoren klein und fett $\boldsymbol{a}$ und Matrizen groß und fett $\boldsymbol{A}$ geschrieben. Handschriftlich werden Vektoren und Matrizen durch einen Unterstrich gekennzeichnet: $\underline{a}$, $\underline{A}$

1 Vektorielle Darstellung von Kurven

Bewegungsabläufe, wie zum Beispiel die zwei- oder dreidimensionale Bewegung eines Körpers, lassen sich am besten vektoriell darstellen. Die Raumkoordinaten x, y und z sind dabei abhängig von einem gemeinsamen Parameter. Die Parametergröße ist häufig die Zeit t (bei kreisförmigen Bewegungen bietet sich auch ein Winkel φ an). Beispiel schiefer Wurf:

1

1.1 Zeitableitung, Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor

Die Zeitableitung[1] eines Vektors $\boldsymbol{r}$ ist ein Tangentenvektor $\dot{\boldsymbol{r}}$:

2

3

Für den Tangenten*einheits*vektor $\boldsymbol{e}_\mathrm{T}$ gilt dann Der Hauptnormaleneinheitsvektor $\boldsymbol{e}_\mathrm{N}$ lässt sich mit Hilfe der Ableitung des Skalarprodukts $\boldsymbol{e}_\mathrm{T} \cdot \boldsymbol{e}_\mathrm{T}$ bestimmen:

[1] Summen-, Produkt- und Kettenregel gelten analog auch für die Ableitung von Vektoren.

4

1.2 Bogenlänge

Die Bogenlänge s einer Kurve lässt sich mit Hilfe des Zusammenhangs $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}$ leicht herleiten:

5

Aufgabe: Leiten Sie die Bogenlänge einer ebenen Kurve mit $y = f(x)$ und $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$ her:

6

1.3 Krümmung

Die *Krümmung* $\varkappa$ einer Kurve ist definiert als die Änderung des Tangenteneinheitsvektors $\boldsymbol{e}_\mathrm{T}$ in Abhängigkeit von der Bogenlänge s:

7

8

Für einen zeitabhängigen[2] Vektor $\boldsymbol{r}(t)$ lässt sich eine einfache Formel für die Krümmung $\varkappa$ aus dem Kreuzprodukt $\boldsymbol{e}_\mathrm{T} \times \boldsymbol{e}'_\mathrm{T}$ herleiten:

Aufgabe: Leiten Sie die Krümmung $\varkappa$ für die ebene Kurve $y = f(x)$ mit $\boldsymbol{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ her.

[2] Der Vektor kann auch von einem beliebigen anderen Parameter k abhängen, die Zeitableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ ist dann durch die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}$ zu ersetzen.

9

1.4 Anwendungsbeispiel: Tangential- und Normalkomponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung

Ein Massepunkt bewege sich auf einer Bahn mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}$. Für die Zerlegung des Geschwindigkeitsvektors gilt dann

10

Für den Beschleunigungsvektor gilt dann

11

2 Kurven- oder Linienintegrale

Ein Massepunkt wird durch ein Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ bewegt. Welche Arbeit ist dabei zu leisten oder wird dabei frei? Um das zu berechnen, ist entlang der Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ des Körpers „Kraft in

Wegrichtung mal Weg“ aufzusummieren:

12

Das lässt sich ausrechnen, indem man den konkreten Zeitverlauf der Bahn einsetzt:

13

Dies ist ein bestimmtes Integral in einer Dimension, wie man es kennt. Wenn das Kraftfeld nicht von der Zeit abhängt, ist es egal, welchen konkreten Zeitverlauf man zum Ausrechnen nimmt; Hauptsache, alle Punkte werden mindestens einmal angefahren. Für Kurvenintegrale über geschlossene Bahnen (das heißt Anfangspunkt = Endpunkt) schreibt man auch einen Kringel durch das Integralzeichen: $\oint$. Diese Integrale treten insbesondere bei der Berechnung von Induktionsspannungen auf. Der Pfad beschreibt dann keine Bewegung, sondern die Form des Leiters.

3 Übungsaufgaben

[Pap11, S.230ff]: alle Aufgaben zu Abschnitt 1

Literatur

[Pap11] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 6. Auflage. Bd. 3. Vieweg + Teubner, 2011.