② Anwendungen der partiellen Ableitung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 31. Juli 2014, 13:48

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Näherung, Tangetialebene

Erinnerung: Die lineare Näherung = Tangentengerade an der Stelle x_0 einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ einer einzigen Veränderlichen war:

1

Eine differenzierbare Funktion $f(x, y)$ von zwei Veränderlichen hat an einer Stelle (x_0, y_0) als lineare Näherung eine Tagential*ebene*:

2

Deren Gleichung ist nicht allzu überraschend:

3

Sie stimmt offensichtlich, wenn man von (x_0, y_0) aus in x- oder y-Richtung geht. Damit ist nur noch diese Ebenengleichung möglich. Ebenfalls lässt sich hier sehen, dass der Gradient in der Tat in die Richtung des steilsten Anstiegs zeigt und senkrecht zur Höhenlinie läuft.

Für die Tangentialebene ergibt sich:

4

Das lässt sich auch als das „totale Differential“ $\mathrm{d}f$ der Funktion f schreiben:

5

Entsprechend mit n Veränderlichen.

2 Lineare Fehlerfortpflanzung bei indirekter Messung einer Größe

Angenommen, wir kennen die arithmetischen Mittelwerte $\bar{x} = 5.0$ und $\bar{y} = 3.0$ zweier direkt gemessenen Größen x und y, sowie die Messunsicherheiten (Standardabweichungen) $\Delta x = 0.2$ und $\Delta y = 0.3$. In welchem Bereich liegt dann der Wert der Funktion $z = f(x, y) = x/(1 + y^2)$? Grafisch:

6

Hier lässt sich mehr oder minder komplex über den Verlauf der Funktion nachdenken und zum Beispiel mit Monotonie argumentieren - oder aber einfach statt der Funktion ihre Tangentialebene untersuchen. Vorsicht: Das ist nicht exakt! Man muss sich überzeugen, dass die Tangentialebene dicht genug an der Funktion liegt. Die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(5, 3)$ ist:

7

Daran lässt sich sofort der mögliche Bereich der Ergebnisse ablesen:

8

Das Rezept ist also:

9

Das Messergebnis wird dann in der Form 10 angegeben.

3 Implizite Ableitung

Wie lässt sich die Ableitung einer Kurve berechnen, die nur als Term und nicht explizit gegeben ist, zum Beispiel die Steigung einer Ellipse $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$? Hierfür lässt sich das totale Differential $\mathrm{d}F = F_x \,\mathrm{d}x + F_y \,\mathrm{d}y$ nutzen:

11

Für die implizite Ableitung einer Funktion $F(x, y) = 0$ gilt somit 12

4 Allgemeine Kettenregel

Wenn die Koordinaten x und y von einem weiteren Parameter t, zum Beispiel der Zeit abhängen, dann lässt sich die Funktion $F(t) = f(x(t), y(t))$ mit Hilfe der allgemeinen Kettenregel nach dem Parameter t ableiten:

13

Dies lässt sich leicht auf mehr als zwei Variablen übertragen:

14

5 Übungsaufgaben

[Pap12, Seite 333f]: zu Abschnitt 2 Aufgaben 7-23.

Literatur

[Pap12] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 13. Auflage. Bd. 2. Vieweg + Teubner, 2012.