① Überblick, Funktionen mehrerer Variablen, Partielle Ableitung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 31. Juli 2014, 13:46

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Prolog

Drei Arten von Mathematik

Es lassen sich grob drei Arten von Mathematik unterscheiden:

- **Schulmathematik** besteht wohl oft aus dem Auswendiglernen von Formeln, dem Einsetzen von Zahlen und Eintippen in den Taschenrechner.
- **Mathematik als Wissenschaft für sich**, wie sie in einem Universitätsstudiengang Mathematik gelehrt wird, baut mehr oder minder interessante mathematische Objekte und leitet Sätze darüber her - nach dem Muster: Definition, Satz, Beweis, ab und zu mit einem Lemma (Hilfssatz) oder einem Korollar (einfache Folgerung) zwischendurch.
- In der **Ingenieurmathematik** oder allgemeiner **Angewandten Mathematik** werden mathematische Modelle erstellet und ausgewertet - in der Physik und im Maschinenbau ebenso wie in der Biologie, der Soziologie oder den Wirtschaftswissenschaften.

Modell und Wirklichkeit

Mathematik sagt nicht, was die Welt ist. Mathematik ist nur ein Baukasten, um die Welt zu modellieren – und damit zum Beispiel vorherzusagen, wie sich ein Fahrzeug verhalten wird oder wie dünn das Eis der Arktis im nächsten Sommer ist. Die Natur- und Technikwissenschaften benutzen die Mathematik, um einerseits immer genauere Modelle zu formulieren, und andererseits Modelle mit der richtigen Modellierungstiefe, angepasst an die Fragestellung, zu bilden. Beispiel: Modellierung der Fahrdynamik:

- lineares Einspurmodell, $i_{\mathrm{S}} = \text{konstant}$
- lineares Einspurmodell, $i_{\mathrm{S}} = f(\delta_{\mathrm{H}})$
- Nichtlineares Einspurmodell
- Zweispurmodell mit Reifen- und Achskennlinien
- Mehrkörpersystem mit Achsbauteilen und Reifenkennlinein
- Mehrkörpersystem mit Achsbauteilen und FEM[1]-Reifenmodellen

Mathematik ist nie die Wirklichkeit, sondern ein Mittel, Beobachtungen zu Modellen zu verdichten und dann daraus Vorhersagen zu gewinnen, insbesondere durch Simulationen. In der Ingenieurmathematik sucht man Modelle, die für die gegebene Anwendung gut genug sind. Beispiel: Um das grundlegende Fahrverhalten eines Autos auszulegen, genügt es, die Reifenkräfte als linear zu betrachten. Die Ingenieurmathematik stellt einen Werkzeugkasten zum Modellieren bereit. Funktionen, Ableitungen und Integrale haben sich über Jahrhunderte als extrem hilfreich herausgestellt, um die Natur zu beschreiben und um Maschinen zu konstruieren. Mathematik ist also nur am Rande das Rechnen, sondern viel mehr der kreative Umgang mit Modellen. Mit Pauken kommt man allenfalls in der Schulmathematik weiter. Außerhalb der Schulmathematik hilft nur Verstehen. Dazu muss man Mathematik anwenden: konkrete Probleme bearbeiten. Und das kostet Zeit. Die meisten spannenden Probleme lassen sich nicht auf Anhieb lösen, sondern verlangen einiges an Nachdenken und Versuchen mit verschiedenen Ansätzen. Um so schöner ist es, ein Problem dann tatsächlich geknackt zu haben.

[1] Finite Elemente Methode

2 Überblick über das dritte Semester

2.1 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Die meisten praktisch relevanten Größen hängen nicht von einer einzigen Variablen ab, sondern gleich von mehreren. Deshalb untersucht man Funktionen *mehrerer* Variablen. Beispiele:

1

Was Ableitung und Integral solcher Funktionen bedeuten:

2

2.2 Lineare Differentialgleichungs-Syteme erster Ordnung

Zum Werkzeugkasten des Ingenieurs gehört die Beschreibung von dynamischen Systemen in Form von DGL-Systemen, linear(-isiert) und mit konstanten Koeffizienten, so dass man die Stabilität und den Zeitverlauf bei bestimmten Anregunge untersuchen und Regelungen entwerfen kann. Wir werden die DGL-Systeme algebraisch und numerisch lösen sowie die Stabilität betrachten. Einfaches Beispiel: die homogene Schwingungsdifferentialgleichung $m\ddot{x}+d\dot{x}+cx = 0$:

2.3 Gesamtübersicht

1. Einführung, Funktionen mehrerer Veränderlicher, partielle Ableitung
2. Anwendungen der Partiellen Ableitung
3. Extremwertrechnung
4. Mehrdimensionale Integrale
5. Koordinatensysteme
6. Vektoranalysis Kurven
7. Gewöhnliche Differentialgleichungen
8. Laplace-Transformation zur Lösung von linearen Differentialgleichungen
9. Fourier-Transformation
10. Lineare Differentialgleichungssysteme und Fundamentalmatrix

3 Reellwertige Funktionen mit mehreren Veränderlichen

3.1 Ideen und Darstellungsverfahren

Üblicherweise stellt man sich reellwertige Funktionen zweier reeller Unabhängiger als Gebirge oder „fliegender Teppich“ vor. Zur Darstellung lassen sich Google, freie Programme wie Grapher (), QtiPlot (,), Microsoft Mathematics 4.0 () und natürlich auch kommerzielle Programme wie MATLAB® (, ,) nutzen. Darstellung mit MATLAB®-Boardmitteln:

```
x = -10:1:10; y = -10:1:10;
[xx,yy]=meshgrid(x,y);
z = xx.^2 + yy.^2 + 0.1*yy.^3;
surf(x,y,z)
colorbar
```

In zwei Dimensionen lassen sich die z-Werte durch reines Einfärben darstellen:

```
%%
imagesc(x,y,z)
colorbar
```

Eine Alternative sind Höhenlinien, allgemein als Isolinien oder Äquipotentiallinen bezeichnet:

```
%%
contour(x,y,z)
colorbar
```

Häufig werden Funktionen mehrerer Unabhängiger auch als Kennlinienfeld (family of characteristics) dargestellt:

```
%%
clf
hold all
h=[];  s='';
for yi=-10:5:10
  z=x.^2+yi^2+0.1*yi^3;
  h=[h plot(x,z)];
  s=char({s;['y = ' num2str(yi,'%+4.1f')]});
end
[m,n]=size(s);
s=s(2:m,:);
legend(h,char(s))
set(gca,'fontsize',16)
hold off
```

Falls die *Symbolic Math Toolbox* in MATLAB® installiert ist, lassen sich Funktionen mit weniger Aufwand darstellen:

```
%%
ezsurf('x^2+y^2+0.1*y^3',[-2 2 -1 1])
%%
ezcontour('0.3*x^2+y^2+0.1*y^3',[-2 2 -1 1])
```

3.2 Formales

Eine Funktion f von n Veränderlichen ordnet jedem Punkt $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus einem *Definitionsbereich* $\boldsymbol{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ genau einen Wert $f(\boldsymbol{x})$ der *Zielmenge* $\mathbb{R}$ zu. Die Menge der *tatsächlich* dabei vorkommenden Werte $f(\boldsymbol{x})$ heißt *Bild* der Funktion f, kurz $f(\boldsymbol{D})$. Die Begriffe *Wertebereich* und *Wertevorrat* werden in der Literatur nicht einheitlich genutzt und können das Bild oder auch die Zielmenge bezeichnen.
Graphisch:

4

4 Partielle Ableitungen, Gradient

Die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x gibt an, wie sich die Funktion ändert, wenn man einen „unendlich“ kleinen Schritt von x vorwärts oder rückwärts macht. Bei einer Funktion mehrerer Unabhängiger lässt sich dieser Schritt auch quer machen. Das Einfachste ist, entlang einer der Achsen zu schreiten. Das ergibt die jeweilige partielle Ableitung: Man behandelt alle Unabhängige als Konstante - bis auf einen einzige Unbekannte - und leitet ganz normal nach dieser einen ab. Das Symbol dafür ist der Differentialquotient mit geschwungenem d, also ∂. Beispiele:

- $f(x, y) = x^2 + y^2$ 5
- $f(x, y) = \sin(xy)$ 6
- $f(u, v, w) = uv^2 + v\mathrm{e}^w$ 7

Die partiellen Ableitungen lassen sich zu einem Vektor übereinanderstellen, zum sogenannten *Gradienten* der Funktion, geschrieben $\operatorname{grad} f$ oder ∇f, oft auch mit Vektorpfeilen zu sehen: $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$, $\vec{\nabla} f$. Das Symbol ∇ heißt „Nabla“ und kommt auch noch in anderen Zusammenhängen vor. Für die drei Beispiele ist der Gradient also:

- $f(x, y) = x^2 + y^2$ 8

9

- $f(x, y) = \sin(xy)$

10

- $f(u, v, w) = uv^2 + v\mathrm{e}^w$

Hier wird jedem Punkt des Definitionsbereichs nicht eine Zahl zugeordnet, sondern ein Vektor: Das sind Vektorfelder. In MATLAB® lässt sich das folgendermaßen darstellen:

```
%%
syms X Y
f=symfun(X^2+Y^2+0.1*Y^3,[X Y])
g=symfun(gradient(f),[X Y])
gXY=(g(xx,yy));
ezcontour(f)
hold all, quiver(xx,yy,double(gXY{1}),double(gXY{2})), hold off
```

Hier lässt sich die Bedeutung des Gradienten erkennen: Je länger er ist, umso steiler ist die Funktion an jener Stelle. Der Gradient zeigt in die Richtung des (örtlich!) steilsten Anstiegs der Funktion. Deswegen steht er *senkrecht* auf den *Höhenlinien.*

11

Achtung: Wie die Höhenlinien lebt der Gradient einer Funktion von n Veränderlichen im $\mathbb{R}^n$, bei $n = 2$ also in der Ebene der Landkarte. Er zeigt *nicht* steil den Berg hinauf! Mit `ezsurfc` statt `ezcontour` im vorigen Programm lässt sich das noch deutlicher sehen.

Streng genommen müsste man diskutieren, was es heißt, dass eine Funktion von n Veränderlichen „total“ differenzierbar ist - also nicht nur partiell differenzierbar. In der Praxis ist das kein Problem: Wenn in einer Umgebung einer Stelle alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, kann man dort in beliebige Richtungen ableiten, auch schräg zu den Koordinatenachsen. Insbesondere sind dann die partiellen Ableitungen vertauschbar:

12

5 Übungsaufgaben

[Pap12]: Seite 332f, zu Abschnit 1 alle Aufgaben, zu Abschnitt 2 Aufgaben 1-6.

Literatur

[Pap12] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 13. Auflage. Bd. 2. Vieweg + Teubner, 2012.