Mathematik 2
Klausur vom 22. November 2013

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 20. Dezember 2013, 9:52

Name	Vorname

Drei Punkte pro Aufgabe. Mindestpunktzahl zum Bestehen: 10 Punkte. Hilfsmittel: maximal acht einseitig oder vier beidseitig beschriftete DIN-A4-Spickzettel beliebigen Inhalts, möglichst selbst verfasst oder zusammengestellt; kein Skript, keine andere Formelsammlung, kein Taschenrechner, kein Computer, kein Mobiltelefon.

Kochrezepte

1. Hat die Funktion $f(x, y) = y + \mathrm{e}^{x-y} + x^2$ an der Stelle $(x_0|y_0) = (-\frac{1}{2}| - \frac{1}{2})$ ein lokales Minimum, oder ein lokales Maximum, oder kein Extremum? Begründen Sie das mit den ersten und zweiten Ableitungen.

2. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $\dfrac{y'}{1 + x + 2x^2} - \dfrac{y}{x} = 0$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 1$. *Hinweis: Trennung der Variablen.*

3. Bestimmen Sie den Hauptnormaleneinheitsvektor $\boldsymbol{e}_\mathrm{N}$ der Bahnkurve, die durch die Vektorfunktion

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(3t) \\ \cos(3t) \\ 4t \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Vereinfachen Sie den Term für $\boldsymbol{e}_\mathrm{N}$ soweit wie möglich. *Hinweis:* $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

4. Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\boldsymbol{\Phi}(s)$ der Fundamentalmatrix $\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{pmatrix}$ sowie das Element $\varphi_{11}(t)$ für folgendes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 & x_1(0) &= 0 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - 3x_2 + u(t) & x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

Hinweis: Auf den Seiten 3 und 4 finden Sie Rechenregeln und Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Kreative Anwendung

5. Schätzen Sie $\mathrm{e}^{-0.1} \cdot \sqrt{17}$ durch lineare Näherung an der Stelle $(0; 16)$.

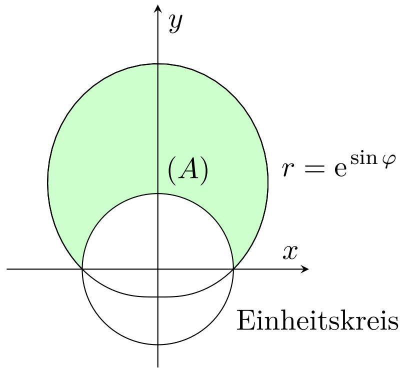
6. Bestimmen Sie das Volumen zwischen der Fläche (A) und der Fläche

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

wobei (A) der Bereich ist, der außerhalb des Einheitskreises und innerhalb der Funktion

$$r(\varphi) = \mathrm{e}^{\sin \varphi}$$

(in Polarkoordinaten) liegt, siehe grüner Bereich in nebenstehender Skizze.



7. Bestimmen Sie die Steigung der Kurve

$$\frac{3}{2}x^2 - 2xy - x + y^2 - \frac{3}{2} = 0$$

in dem Schnittpunkt $(x_0|y_0)$ mit der Geraden $y = x$, für den $x_0 > 0$ gilt.

8. Bonusaufgabe: Leiten Sie folgende Korrespondenz her:

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \quad \text{mit } \alpha > 0 \text{ reell}$$

Hinweise:

a) *Nutzen Sie die Substitution $r = s \cdot t$.*

b) *Die Gamma-Funktion Γ ist für reelle $\alpha > 0$ definiert als*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$$

Rechenregeln für die Laplace-Transformation

Linearitätseigenschaft	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$
Verschiebungssatz	$f(t - T_\mathrm{t}) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)\mathrm{e}^{-sT_\mathrm{t}}$
Dämpfungssatz	$\mathrm{e}^{-at} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s+a)$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ sF(s) - f(0)$
2-fache Differentiation	$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2 F(s) - sf(0) - \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right\vert_0$
n-fache Differentiation	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \left.\frac{\mathrm{d}^{i-1} f}{\mathrm{d}t^{i-1}}\right\vert_0$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s} F(s)$
Faltungssatz	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ F_1(s) \cdot F_2(s)$
1. Grenzwertsatz	$f(0+) = \lim_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} \Big(sF(s)\Big)$
2. Grenzwertsatz	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} \Big(sF(s)\Big)$

Einige Korrespondenzen der Laplace-Transformation mit $f(t<0)=0$

Nr.	$f(t),\, t \geq 0$	$F(s)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$
1	$\delta(t)$	1
2	$h(t)$ oder 1	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n,\, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	$t^n e^{-at},\, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
7	$\cos\omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
8	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
9	$\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
10	$\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
11	$t\cos\omega_0 t$	$\frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
12	$t\sin\omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
13	$1-\mathrm{e}^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
14	$\mathrm{e}^{-at}+at-1$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$
15	$\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
16	$a\mathrm{e}^{-at}-b\mathrm{e}^{-bt}$	$\frac{(a-b)s}{(s+a)(s+b)}$

Lösungen

1.

$$f_x(x,y) = \mathrm{e}^{x-y} + 2x, \quad f_{xx}(x,y) = \mathrm{e}^{x-y} + 2 \quad f_{xy}(x,y) = -\mathrm{e}^{x-y}$$
$$f_y = -\mathrm{e}^{x-y} + 1, \quad f_{yy}(x,y) = \mathrm{e}^{x-y}$$
$$f_x(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = 1 - 1 = 0 \quad f_y(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -1 + 1 = 0$$
$\Rightarrow$ mögliches Extremum
$$H_f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(H_f) = 3 - 1 = 2 > 0$$
$\Rightarrow$ Tiefpunkt

2.

$$y' = y \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 + 2x\right)$$
$$\Rightarrow \int_1^y \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_1^x \left(\frac{1}{x} + 1 + 2x\right) \mathrm{d}x$$
$$[\ln y]_1^y = \left[\ln x + x + x^2\right]_1^x$$
$$\Leftrightarrow \ln y = \ln x + x + x^2 - \ln 1 - 1 - 1^2$$
$$\Leftrightarrow y = \mathrm{e}^{\ln x + x + x^2 - 2}$$

3.

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} 3\cos 3t \\ -3\sin 3t \\ 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{e}_\mathrm{T} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\sqrt{9(\cos^2 3t + \sin^2 3t) + 16}} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{5}$$
$$\dot{\boldsymbol{e}}_\mathrm{T} = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{5} \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} -9\sin 3t \\ -9\cos 3t \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\dot{\boldsymbol{e}}_\mathrm{T}| = \frac{\sqrt{81(\sin^2 3t + \cos^2 3t)}}{5} = \frac{9}{5}$$
$$\boldsymbol{e}_\mathrm{N} = \frac{\dot{\boldsymbol{e}_\mathrm{T}}}{|\dot{\boldsymbol{e}}_\mathrm{T}|} = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}/5}{9/5} = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{9} = -\begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\\
&(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix} \quad \operatorname{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix}\\
&|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = (s+2)(s+3) - 2 = s^2 + 5s + 4 = (s+4)(s+1)\\
&\Rightarrow \boldsymbol{\Phi}(s) = \frac{1}{(s+4)(s+1)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix}\\
&\phi_{11}(s) = \frac{s+3}{(s+4)(s+1)} \quad \text{Korr. 15 und 16}\\
&a = 4, b = 1 \Rightarrow \phi_{11}(s) = \frac{1}{3}\frac{(4-1)s}{(s+4)(s+1)} - \frac{1-4}{(s+4)(s+1)}\\
&\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ \phi(t) = \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4t} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t} - (\mathrm{e}^{-4t} - \mathrm{e}^{-t})\\
&\phi(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}
\end{aligned}
$$

5. Lineare Näherung von $f(x,y) = \mathrm{e}^x\sqrt{y}$, $f_x = \mathrm{e}^x\sqrt{y}$, $f_y = \mathrm{e}^x\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$$
\begin{aligned}
f(0.1, 14) &= f(0,16) + f_x(0,16)(0.1-0) + f_y(0,16)(14-16)\\
&= (1\cdot 4) + 4\cdot(-0.1) + \tfrac{1}{2\cdot 4}\cdot(-2)\\
&= 4 - 0.4 - 0.25\\
&= 3.35
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
V &= \iint\limits_{(A)} \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad r^2 = x^2 + y^2, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\
&= \int_0^{\pi}\int_1^{\mathrm{e}^{\sin\varphi}} \frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}{r} = \int_0^{\pi} [\ln r]_1^{\mathrm{e}^{\sin\varphi}} = \int_0^{\pi} \sin\varphi = [-\cos\varphi]_0^{\pi} = -(-1) - (-1)\\
&= 2
\end{aligned}
$$

7.

$$
\begin{aligned}
&F_x = 3x - 2y - 1 \quad F_y = -2x + 2y \quad F' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{-3x + 2y + 1}{-2x + 2y}\\
&y_0 = x_0 \Rightarrow \frac{3}{2}x_0^2 - 2x_0^2 - x_0 + x_0^2 - \frac{3}{2} = 0\\
&x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2\\
&y_0 = x_0 = 3 \Rightarrow F_y(x_0, x_0) = 0 \Rightarrow \text{senkrecht}
\end{aligned}
$$

8.

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Substitution: $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}st}{\mathrm{d}t} = s \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}r}{s}$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{(r)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-r}}{s^{\alpha-1}}\frac{\mathrm{d}r}{s}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}$$