Mathematik 2
Klausur vom 22. November 2013

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 17. Mai 2014, 20:30

Name	Vorname

Drei Punkte pro Aufgabe. Mindestpunktzahl zum Bestehen: 10 Punkte. Hilfsmittel: maximal acht einseitig oder vier beidseitig beschriftete DIN-A4-Spickzettel beliebigen Inhalts, möglichst selbst verfasst oder zusammengestellt; kein Skript, keine andere Formelsammlung, kein Taschenrechner, kein Computer, kein Mobiltelefon.

Kochrezepte

1. Hat die Funktion $f(x, y) = y + \mathrm{e}^{x-y} + x^2$ an der Stelle $(x_0|y_0) = (-\frac{1}{2}| - \frac{1}{2})$ ein lokales Minimum, oder ein lokales Maximum, oder kein Extremum? Begründen Sie das mit den ersten und zweiten Ableitungen.

2. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $\dfrac{y'}{1 + x + 2x^2} - \dfrac{y}{x} = 0$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 1$. *Hinweis: Trennung der Variablen.*

3. Bestimmen Sie den Hauptnormaleneinheitsvektor $\boldsymbol{e}_\mathrm{N}$ der Bahnkurve, die durch die Vektorfunktion

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(3t) \\ \cos(3t) \\ 4t \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Vereinfachen Sie den Term für $\boldsymbol{e}_\mathrm{N}$ soweit wie möglich. *Hinweis:* $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

4. Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\boldsymbol{\Phi}(s)$ der Fundamentalmatrix $\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{pmatrix}$ sowie das Element $\varphi_{11}(t)$ für folgendes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 & \qquad x_1(0) &= 0 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - 3x_2 + u(t) & \qquad x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

Hinweis: Auf den Seiten 3 und 4 finden Sie Rechenregeln und Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Kreative Anwendung

5. Schätzen Sie $\mathrm{e}^{-0.1} \cdot \sqrt{17}$ durch lineare Näherung an der Stelle $(0; 16)$.

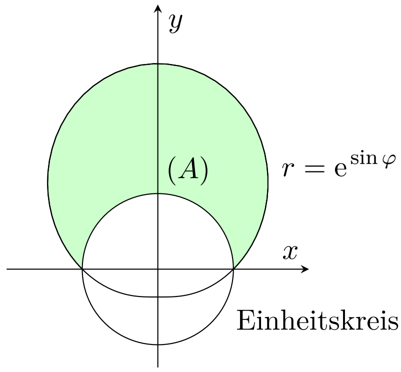
6. Bestimmen Sie das Volumen zwischen der Fläche (A) und der Fläche

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

wobei (A) der Bereich ist, der außerhalb des Einheitskreises und innerhalb der Funktion

$$r(\varphi) = \mathrm{e}^{\sin\varphi}$$

(in Polarkoordinaten) liegt, siehe grüner Bereich in nebenstehender Skizze.



7. Bestimmen Sie die Steigung der Kurve

$$\frac{3}{2}x^2 - 2xy - x + y^2 - \frac{3}{2} = 0$$

in dem Schnittpunkt $(x_0|y_0)$ mit der Geraden $y = x$, für den $x_0 > 0$ gilt.

8. Bonusaufgabe: Leiten Sie folgende Korrespondenz her:

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \quad \text{mit } \alpha > 0 \text{ reell}$$

Hinweise:

a) *Nutzen Sie die Substitution $r = s \cdot t$.*

b) *Die Gamma-Funktion Γ ist für reelle $\alpha > 0$ definiert als*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \cdot \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Rechenregeln für die Laplace-Transformation

Linearitätseigenschaft	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$
Verschiebungssatz	$f(t - T_\mathrm{t}) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s)\mathrm{e}^{-sT_\mathrm{t}}$
Dämpfungssatz	$\mathrm{e}^{-at} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s+a)$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \circ\!\!-\!\!\bullet\, sF(s) - f(0)$
2-fache Differentiation	$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\, s^2 F(s) - sf(0) - \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right\vert_0$
n-fache Differentiation	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} \circ\!\!-\!\!\bullet\, s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \left.\frac{\mathrm{d}^{i-1} f}{\mathrm{d}t^{i-1}}\right\vert_0$
Integration im Zeitbereich	$\int\limits_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{s} F(s)$
Faltungssatz	$\int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\, F_1(s) \cdot F_2(s)$
1. Grenzwertsatz	$f(0+) = \lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} \Big(sF(s)\Big)$
2. Grenzwertsatz	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} \Big(sF(s)\Big)$

Einige Korrespondenzen der Laplace-Transformation mit $f(t<0)=0$

Nr.	$f(t)$, $t \geq 0$	$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t$
1	$\delta(t)$	1
2	$h(t)$ oder 1	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	t^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	$t^n e^{-at}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
7	$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
8	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
9	$\mathrm{e}^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
10	$\mathrm{e}^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
11	$t \cos \omega_0 t$	$\frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
12	$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
13	$1 - \mathrm{e}^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
14	$\mathrm{e}^{-at} + at - 1$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$
15	$\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
16	$a\mathrm{e}^{-at} - b\mathrm{e}^{-bt}$	$\frac{(a-b)s}{(s+a)(s+b)}$